10. BÜLÜM

PARAMETRİK VE *NON*-PARAMETRİK HİPOTEZ TESTLERİ

10. PARAMETRİK HİPOTEZ TESTLERİ

Matematik-istatistiğin temel konularından biri olan tahmin teorisi; evrensel küme parametrelerinin n sonlu sayıda veriden oluşan bir ölçü kümesinden tahminleri veya bunlarla ilgili bazı varsayımlara dayalı kurulan hipotezlerin istatistik olarak irdelenmesi konuları ile ilgilenmektedir. Bu amaçla kullanılmakta olan bütün hipotez testleri, sergiledikleri nitel veya nicel veriler olma özellikleri yanında n veri sayısının çokluğuna ve sahip oldukları istatistik dağılımın türüne ve aralık değerlerine bağlı olarak da; *parametrik* ve *non-parametrik* hipotez testleri olmak üzere, iki grupta ele alınabilirler.

Gerekli varsayımların geçerli olduğu durumlarda *parametrik* hipotez testi teknikleri güvenirliklerini büyük ölçüde sağlarken, varsayımların geçerli olmadığı durumlarda güvenilirliklerini benzer ölçüde kaybederler. Bu gibi durumlarda, alternatif bir diğer hipotez test tekniği olan *non-parametrik* yöntemler devreye girerek daha güvenirli sonuç ve yorumların yapılmasında olanak sağlar. Uygulamada, bu yöntemlerden hangisinin seçilerek kullanılacağı önceden bilinmesi gereken bir diğer konu olmaktadır.

Bilindiği gibi, nitel özellikli tüm jeodezik faaliyetlerde veri olarak kullanılan ölçü diğerleri her zaman normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olmaktadır. Ancak, kuramsal anlamda ya da diğer bir ifade ile veri sayısının $n \to \infty$ olduğu uygulamalarda, geçerliliğini her zaman koruyabilen böyle bir ifade veri sayısının az olduğu durumlarda yetersiz kalmaktadır. Bütün nitel özellikli verilerin istatistik olarak analizinde geçerli olan böyle bir özellik çeşit veri irdelemesi yöntemi olan hipotez testleri için de aynı şekilde geçerliğini korumaktadır.

Bu nedenle, uygulamada, normal dağılıma sahip ve $n > 30$ fazla elemanı temsil eden nitel özellikli rastgele değişkenle ilgili n sonlu sayıda, ölçmeler sonucunda elde edilmiş örnekleme küme elemanlarının veya bu kümelerden kestirilmiş ortalama ya da kesin değerlerin karşılaştırılması amacıyla; her biriyle ilgili kuramsal değerleri eşit ya da farklı oluşlarına; ayrıca bağımlı olup olmadıklarına göre pratikte bazı hipotez testi uygulanı. Burada, günümüzde bu amaca yönelik geliştirmiş ve halen kullanılmakta olan bazı hipotez testi ele alınarak özet de olsa kuramsal açıklanmaları yanında çeşitli jeodezik problemlerdeki uygulanış biçimleri örneklemeli olarak verilecektir.

10.1. Tek Örnek z-Testi

Bu test yönteminde, normal dağılıma sahip bir rastgele değişkenin n sonlu sayıda yapılmış ölçmeler sonucunda elde edilmiş veri kümesinden tahmin edilen

- $\hat{x}$ *Kesin ya da ortalama değeri,*
- σ_0^2 *Gerçek varyans veya* σ_0 *standart sapma değerlerinden*

herhangi birinin bilinmesi halinde, ölçülerin gerçek değeri olan μ_0 kuramsal ortalama değerine belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre eşit alınıp alınamayacağı irdelenmektedir. Bu durumuyla uygulanabilecek böyle bir hipotez testi; aynı zamanda σ_0 kuramsal standart sapama değerinin bilinmesi halinde örnek küme ortalaması değerinin irdelenmesi olarak da bilinir. Bu amaçla kurulacak bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{\hat{x}\} = \mu_0$$
$$H_s : E\{\hat{x}\} \neq \mu_0$$

biçiminde yazılır. Sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin standart normal dağılıma sahip rastgele değişken ya da diğer adıyla test büyüklüğü,

$$\sigma_x = \sigma_0 / \sqrt{n}$$

olmak üzere,

$$z = \frac{\hat{x} - \mu_0}{\sigma_x}$$

biçiminde elde edilebilir. Daha sonra bu test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri, öngörülen $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılım tablosundan tek taraflı hipotez testi için z_α veya çift taraflı hipotez testi için de $z_{\alpha/2}$ olarak alınır.

Test büyüklüğü ile bu sınır *(kritik)* değerlerin karşılaştırılmasından $z < z_\alpha$ veya $-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile n sonlu sayıda ölçü kümesinden hesaplanmış $\bar{x}$ tahmin değeri ölçüler için geçek değer seçilmiş μ_0 değerine eşit alınabilir.

Tersi durumda; eğer $z > z_\alpha$ veya $z > \left|z_{\alpha/2}\right|$ olması halinde olması halinde ise H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu durumda yorum, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile n sonlu sayıda ölçü kümesinden hesaplanmış $\hat{x}$ tahmin değeri ölçüler için geçek değer seçilmiş μ_0 değerine eşit olduğu söylenemez.

Örnek: Arazide bir noktanın gerçek değeri olarak kabul edilebilecek yükseklik değeri çok sayıda ölçüden presizyonlu nivelman yöntemiyle $546{,}266 \pm 0{,}008m$ olarak elde edilmiştir. Daha sonra aynı noktanın yüksekliği geometrik nivelman yöntemiyle ölçülerek $546{,}254m.$ bulunmuştur.

Bu noktanın geometrik nivelmanla belirlenmiş kesin yükseklik değeri, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile gerçek değer kabul edilebilecek $546{,}266 \pm 0{,}008m$ değerine eşit alınıp alınamayacağı irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözümü için, $\hat{x} = 546{,}254m$, $\mu_0 = 546{,}266m$ ve $\sigma_{\hat{x}} \pm 0{,}008m$ oldukları göz önüne alınarak Bölüm 10.1 ‘de anlatılanlara benzer bir yol izlenerek sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{\hat{x}\} = \mu_0$$
$$H_s : E\{\hat{x}\} \neq \mu_0$$

biçiminde çift yönlü olarak kurulur.

Sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü ya da diğer adıyla standart dağılıma sahip rastgele değişken değeri,

$$z = \frac{\hat{x} - \mu}{\sigma_x} = \frac{546{,}254 - 546{,}266}{0{,}008} = \frac{-0{,}012}{0{,}008} = \left|\frac{12}{8}\right| = 1{,}50$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra, buna karşılık gelen sınır değeri için, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre normal dağılım tablosundan, tek yönlü test için $z_\alpha = 1{,}645$ ve çift taraflı hipotez irdelemesi için de $\alpha/2 = 0{,}025$ olmak üzere $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ değerleri alınır. Bu iki değerin karşılaştırılmasından tek yönlü hipotez testi için $z < z_\alpha$ veya çift yönlü test için de $z < z_{\alpha/2}$ olduğundan H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; her iki $\alpha = 0{,}05$ veya $\alpha/2 = 0{,}025$ yanılma olasılığı durumları için bu noktanın geometrik nivelmanla belirlenmiş $\hat{x} = 546{,}254m$ yükseklik değeri presizyonlu nivelmanla belirlenmiş $\mu_0 = 546{,}266m$ geçek değerine eşit kabul edilebilir denir.

10.2. Tek Örnek *t*-Testi

Bu test yönteminde, paragraf 10.1. ‘de anlatılanların aksine; normal dağılıma sahip bir rastgele değişkenin n sonlu sayıda ölçmeler sonucunda elde edilmiş veri kümesinden tahmin edilen $\hat{x}$ kesin*(ortalama)* değerinin, veri kümesinin σ_0^2 gerçek varyans değerlerinin bilinmemesi halinde bunu yerine veri kümesi elemanlarından

$$v_i = \bar{x} - x_i$$

olmak üzere,

$$s_0 = \pm\sqrt{[vv]/(n-1)}$$

biçiminde hesaplanan s_0 deneysel standart sapma veya s_0^2 deneysel varyans değerinin bilinmesi durumunda ölçülerin gerçek değeri olan μ_0 kuramsal umut ya da ortalama değerine belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre eşit alınıp alınamayacağı irdelenmektedir. Pratikte böyle bir problem, aynı zamanda σ_0 gerçek karesel ortalama hatanın bilinmemesi, dolayısı ile bunun yerine s_0 deneysel karesel ortalama hatanın bilinmesi halinde gerçek değerin irdelenmesi olarak da bilinir. Bu amaçla kurulacak bir sıfır hipotezi, paragraf 10.1. 'dekine benzer şekilde,

$$H_0 : E\{\hat{x}\} = \mu_0$$
$$H_s : E\{\hat{x}\} \neq \mu_0$$

biçiminde yazılabilir. Sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin standart normal dağılıma sahip rastgele değişken veya diğer adıyla test büyüklüğü de

$$s_{\hat{x}} = {s_0}/{\sqrt{n}}$$

olmak üzere,

$$t = \frac{\hat{x} - \mu_0}{s_{\hat{x}}}$$

biçiminde olur.

Bu durumda, t-test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri de artık öngörülen $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre ilgili normal dağılım tablosundan alınamaz. Bunun yerine örnekleme veri kümesinin dağılımına uyan ve normal dağılımdan az farklı, tek taraflı hipotez testi için $f = n - 1$ serbestlik derecesine ve α yanılma olasılığına göre t-dağılım tablosundan $t_{f,\alpha}$ veya çift taraflı hipotez irdelemesi için de aynı tür dağılım tablosundan $t_{f,\alpha/2}$ çift yönlü olarak alınır.

Daha sonra, bu sınır değerlerinin test büyüklüğü ile karşılaştırılmasından; tek taraflı hipotez testi için $t < t_{f,\alpha}$ ve çift taraflı hipotez testi için de $-t_{f,\alpha/2} < t < t_{f,\alpha/2}$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; tek ya da çift yönlü hipotez için α yanılma olasılıklarına göre n sonlu sayıda ölçü kümesinden hesaplanmış $\hat{x}$ tahmin değeri, ölçüler için geçek değer seçilmiş μ_0 değerine eşit alınabileceği hükmüne varılabilir.

Tersi durumda; $t > t_{f,\alpha}$ ya da $t > \left| t_{f,\alpha/2} \right|$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu durumda yorum, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile n sonlu sayıda ölçü kümesinden hesaplanmış $\hat{x}$ tahmin değeri ölçüler için geçek değer seçilmiş μ_0 değerine eşit alınabileceği artık söylenemez.

Örnek: Arazide bir noktanın kesin yükseklik değeri, çevrede yükseklikleri bilinen $n = 9$ noktadan yükseklik taşıması yöntemiyle belirlenerek $\hat{x} = 645{,}266m$ ve $s_0 = \pm 2{,}4cm$ olarak hesaplanmıştır. Bu noktanın daha önce yapılmış çok sayıda ölçmelerden gerçek değer kabul edilebilecek yükseklik değeri $\mu_0 = 645{,}256m$ olarak bilinmektedir. Bu noktanın yükseklik taşıması ölçmeleri sonucunda $\hat{x} = 645{,}266m$ olarak hesaplanmış yükseklik değeri bu nokta için gerçek yükseklik değeri kabul edilen $\mu_0 = 645{,}256m$ değerine $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacağı irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözümü için paragraf 10.5 ‘de anlatıldığı gibi bir işlem yolu izlenerek, önce

$$H_0 : E\{\hat{x}\} = \mu_0$$
$$H_s : E\{\hat{x}\} \neq \mu_0$$

biçiminde bir sıfır hipotezi kurulur.

Daha sonra $\mu_0 = 645{,}256m$, $n = 9$, $\hat{x} = 645{,}266m$ ve $s_0 = \pm 2{,}4cm$ oldukları göz önüne alınarak, bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü,

$$s_{\hat{x}} = {s_0}/{\sqrt{n}} = {2{,}4}/{\sqrt{9}} = 0{,}8cm = 8mm.$$

olmak üzere,

$$t = \frac{\hat{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{645{,}266 - 645{,}256}{0{,}008} = \frac{10}{8} = 1{,}25$$

olarak hesaplanır.

Bu test büyüklüğü değeri ile ilgili sınır değeri, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = n - 1 = 9 - 1 = 8$ serbestlik derecesine göre ilgili t-dağılım tablosundan $t_{f,\alpha} = t_{8,0,05} = 1{,}860$ veya Çift yönlü test için de ${\alpha}/{2} = 0{,}025$ olmak üzere $t_{f,\alpha/2} = t_{8,0,025} = 2{,}306$ olarak alınır. Her iki değerin karşılaştırılmasından $t < t_{f,\alpha}$

ya da $t < t_{f,\alpha/2}$ olduğundan H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; Bu nivelman noktasının, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile çevrede yükseklik değerleri bilinen $n = 9$ sayıda nivelman noktasından yükseklik taşıması yöntemiyle $\hat{x} = 645{,}266m$ olarak hesaplanmış kesin yüksek değeri, daha önceden belirlenmiş, *(ancak burada gerçek değer olarak kabul edilebilecek bir değer olan)* $\mu_0 = 645{,}256m$ değerine eşit alınabileceği söylenememektedir.

10.3. Bağımsız İki Örnek Küme İle İlgili Hipotez Testleri

Paragraf 10.1. ve paragraf 10.2. de tek örnek küme için anlatılan hipotez testleri, birbirinden bağımsız iki örnek veri kümesi için de birlikte düşünülüp ele alındığında bağımsız iki örnek veri kümesiyle ilgili bazı hipotez testleri elde edilmiş olur. Bunların her biri tanımlanmalarında kullanılan ilgili parametrelerin özelliklerine göre farklı durumlar sergilerler. Bu nedenle de farklı isimler altında ele alınabilirler. Burada, ilgili hipotez testi yöntemlerinden konuyla ilgili bazıları ele alınarak özet de olsa örneklemeli bir biçimde açıklanacaktır.

10.3.1. Kuramsal Standart Sapmaları Bilinen ve Bağımsız İki Ölçü Kümesinin Ortalama Değerlerinin Testi

Bu test yöntemi uygulamada çoğu zaman *iki örnek z-testi* olarak da adlandırılmaktadır. Böyle bir hipotez testinde temel ilke olarak; her biri normal dağılımda olan iki veri kümesine ilişkin σ_1 ve σ_2 ölçülerin kuramsal standart sapma değerleri ile μ_1, μ_2 kuramsal ortalama değerleri yanında n sonlu sayıda ölçmeler sonucunda elde edilmiş örnek veri kümelerine ilişkin $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ kesin (*ortalama*) değerlerinin bilinmiş olması yatmaktadır. Buna göre kurulacak bir sıfır hipotezi, $\delta\mu = |\mu_1 - \mu_2|$ her bir normal dağılımın kuramsal ortalama değerleri arasındaki fark olmak üzere

a) *Çift taraflı bir hipotez testi için,*

$$H_0 : E\{\hat{x}_1\} = E\{\hat{x}_2\} \quad \text{ve} \quad H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ya da} \quad H_0 : \delta\mu = 0$$
$$H_s : E\{\hat{x}_1\} \neq E\{\hat{x}_2\} \qquad\;\; H_s : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad\quad\;\; H_s : \delta\mu \neq 0$$

b) Tek taraflı bir diğer hipotez testi için de

$$H_0 : E\{\hat{x}_1\} = E\{\hat{x}_2\}$$
$$H_s : E\{\hat{x}_1\} > E\{\hat{x}_2\}$$
$$E\{\hat{x}_1\} < E\{\hat{x}_2\}$$

ya da

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad\qquad H_0 : \delta\mu = 0$$
$$H_s : \mu_1 > \mu_2 \qquad \text{veya} \qquad H_s : \delta\mu > 0$$
$$\mu_1 < \mu_2$$

biçimindeki bağıntılardan biriyle ifade edilebilirler.

Böyle bir sıfır hipotezinin kuramsal standart dağılıma sahip bir rastgele değişken değeri ya da sınır *(kritik)* değeri ile karşılaştırılabilmesi için, örnekleme veri kümelerinden tanımlanmış $z \to N(0,1)$ standart normal dağılıma sahip rastgele değişken değeri veya diğer adıyla test büyüklüğü

$$z = \frac{|\hat{x}_1 - \hat{x}_2| - \delta\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

bağıntısından hesaplanır.

Daha sonra, buna karşılık gelen sınır değeri önceden belirlenmiş bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına veya $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine göre; Tek yönlü test için doğrudan z_α, çift yönlü test için de $z_{\alpha/2}$ olarak ilgili normal dağılım tablosundan alınır.

Her iki değerin karşılaştırılmasından, eğer $z < z_\alpha$ veya $-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}$ ise H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile her iki ölçü kümesinden hesaplanmış $\hat{x}_1$ ve $\hat{x}_2$ tahmin değerleri eşit alınabilir. Aynı kuramsal kümeden elde edilmiş oldukları söylenebilir.

Tersi durumda; eğer $z > z_\alpha$ veya $z > |z_{\alpha/2}|$ ise H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu durumda yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile her iki ölçü kümesinden hesaplanmış $\hat{x}_1$ ve $\hat{x}_2$ tahmin değerleri eşit oldukları artık söylenemez.

10.3.2. Kuramsal Standart Sapmaları Bilinmeyen ve Eşit Bağımsız İki Ölçü Kümesinin Ortalama Değerlerinin Testi

Bu yöntem bazı durumlarda, kuramsal standart sapma değerleri bilinmeyen normal dağılıma sahip iki ölçü kümesinin ortalama değerlerinin karşılaştırması testi ya da kısaca *iki örnek t-testi* olarak adlandırılmaktadır. Böyle bir hipotez testinde bir büyüklüğe ilişkin aynı alet, aynı kişi ve aynı koşullar altında ancak farklı zamanlarda yapılan gözlemler;

$$
\begin{array}{lll}
t_1 \;\; \textit{anı için} & l_{1i} \;\; ; \;\; i = 1, 2, 3, \ldots, m \\
t_2 \;\; \textit{anı için de} & l_{2i} \;\; ; \;\; i = 1, 2, 3, \ldots., n
\end{array}
$$

olarak verilmiş olsunlar. Ancak burada geçerli olan bir varsayım, her iki grupta verilmiş olan gözlemlerin kuramsal standart sapmaları $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ bir birine eşit ve her biri normal dağılıma sahip verilerden tanımlanmış olmalarıdır. Yanı bunlar; uygulamada, normal dağılıma sahip aynı evrensel kümenin birer farklı örnekleme sonuçları olarak elde edilmiş alt kümeler olmaktadır. Aynı zamanda bunların μ_1 ve μ_2 değerleri, verilen her bir grubu için

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \textit{grup ölçü için} & \mu_1 = E\{l_{1i}\} \;\; ; \;\; i = 1,\ 2,\ \ldots.,\ m \\
2.\ \textit{grup ölçü için} & \mu_2 = E\{l_{2i}\} \;\; ; \;\; i = 1,\ 2,\ \ldots.,\ n
\end{array}
$$

biçiminde hesaplanan değerleri olmaktadır. Buna göre, $\delta\mu = |\mu_1 - \mu_2|$ olmak üzere, çift yönlü bir hipotez testi için sıfır hipotezi,

$$
\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_s : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \quad \text{veya} \quad \begin{array}{l} H_0 : \delta\mu = 0 \\ H_s : \delta\mu \neq 0 \end{array}
$$

ve tek taraflı bir diğer hipotez testi için de

$$
\begin{array}{l}
H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\
H_s : \mu_1 > \mu_2 \\
\qquad \mu_1 < \mu_2
\end{array}
$$

olarak kurulabilirler. Böyle bir hipoteze göre; her bir ölçü kümesinden,

$$\hat{x}_1 = \frac{l_{11} + l_{12} + ...+ l_{1m}}{m} ; \hat{x}_2 = \frac{l_{21} + l_{22} + ...+ l_{2n}}{n}$$

şeklinde elde edilecek ortalama değerler ile bunların farkından,

$$d = \left| \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \right|$$

şeklinde hesaplanmış sıfır hipotezi ile ilgili bir rastgele değişken elde edilmiş olur. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ sıfır hipotezinin geçerli olduğu durumlarda; d rastgele değişkeninin umut değeri,

$$E\{d\} = E\{\hat{x}_1\} - E\{\hat{x}_2\} = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

olmaktadır. Bu durumda yukarıda kurulmuş olan sıfır hipotez testi de dikkate alınması ile aynı sıfır hipotezi,

$$\begin{array}{l} H_0 : E\{d\} = 0 \\ H_s : E\{d\} \neq 0 \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{l} H_0 : E\{d\} = 0 \\ H_s : E\{d\} > 0 \end{array}$$

biçiminde de ifade edilebilir. Burada, her iki ölçü grubuna ilişkin kuramsal standart sapma değerleri eşit olacağından, örnekleme verilerden her biri için hesaplanacak,

$$s_1 = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1]}{m-1}} \quad ; \quad s_2 = \pm\sqrt{\frac{[v_2 v_2]}{n-1}}$$

deneysel varyanslarının umut değerleri de;

$$E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = \sigma^2$$

benzer şekilde birbirine eşit olur. Bu durumda, her iki gruptaki ölçüler için ortak standart sapma değeri,

$$s = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1] + [v_2 v_2]}{m+n-2}} = \pm\sqrt{\frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}}$$

formülünden hesaplanabilir.

Burada, her bir ölçü grubunun $\hat{x}_1$ ve $\hat{x}_2$ kesin değerlerinin ya da deneysel ortalama değerlerinin $s_{\hat{x}_1}$, $s_{\hat{x}_2}$ standart sapma değerleri,

$$s_{\hat{x}_1} = \frac{s}{\sqrt{m}} \qquad \text{ve} \qquad s_{\hat{x}_2} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

bağıntılarından bulunabilir. Sonuçta; *d* rastgele değişkenin standart sapması da;

$$s_d^2 = s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2 = \frac{s^2}{m} + \frac{s^2}{n}$$

bağıntısından faydalanarak,

$$s_d = \pm s\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$$

olarak hesaplanabilir. Buradan, ilgili sıfır hipotez testi için standart *t*-dağılımına sahip standart rastgele değişken değeri ya da test büyüklüğü,

$$T = \frac{|d| - \delta\mu}{s_d}$$

bağıntısından elde edilebilir.

Neticede, bu test büyüklüğü *t*-dağılımında bir rastgele değişken olmaktadır. Bu nedenle, test büyüklüğü, *t*-dağılım tablolarından $f = m + n - 2$ serbestlik derecesine ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre,

- *Çift yönlü test için* : $q = t_{f,1-\frac{\alpha}{2}}$,
- *Tek yönlü test için de* : $q = t_{f,1-\alpha}$

olarak alınacak bir q değerleri ile karşılaştırılır.

Her iki değer arasında yapılacak böyle bir karşılaştırma neticesinde, test büyüklüğünün $T<q$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f=m+n-2$ serbestlik derecesine göre her iki ölçü grubunun deneysel ortalama değerleri birbirine eşit alınabilir.

Tersi durumda yani $T>q$ olması halinde ise; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi geçerli olur ve buna göre de tersi yönde bir yorum yapılır.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve *f=m+n-2* serbestlik derecesine göre; her iki ölçü grubunun deneysel ortalama değerleri birbirine eşit alınamamaktadır.

Örnek: İki nokta arasındaki bir uzunluk; farklı zamanlarda aynı alet, aynı kişi ve aynı atmosferik koşullar altında ölçülerek;

Tablo 31: Ölçü değerleri

t_1 zamanı	*422,7162m,*	*422,7218*	*422,7172*	*422,7214*		
t_2 zamanı	*422,7687m*	*422,7666*	*422,7743*	*422,7801*	*422,7714*	*422,7796*

değerleri elde edilmiştir (Tablo 31). Bu iki ölçü kümesinin kesin değerleri eşit alınabilir mi? , $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Bu problemin çözümünün ilk işlem adımı olarak, $\delta\mu = |\mu_1 - \mu_2| = 0$ alınarak sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{d\} = 0$$
$$H_s : E\{d\} \neq 0$$

şeklinde kurulur. Sonra, her bir ölçü grubundan bu mesafeyle ilgili elde edilecek kesin uzunluk değerleri,

$$\hat{x}_1 = \frac{[l_1]}{4} = 422{,}71915m \qquad \text{ve} \qquad \hat{x}_2 = \frac{[l_2]}{6} = 422{,}77345m$$

olarak hesaplanır. Daha sonra, her bir ölçü grubuna ilişkin düzeltmelerin toplamından, $[v_1v_1] = 24{,}59$ ve $[v_2v_2] = 156{,}455$ değerleri hesaplanarak, kesin değerler farkının standart sapması için,

$$s_0^2 = \frac{[v_1v_1]}{m-1} + \frac{[v_2v_2]}{n-1} = \frac{24{,}59}{4-1} + \frac{156{,}455}{6-1} = 22{,}63$$

olmak üzere

$$s_d = s_0\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = 4{,}757\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} \approx 3{,}07mm.$$

değeri bulunur. Kurulan hipotez testi ile ilgili test büyüklüğü, $\hat{x}_1 = 422{,}71915m$ ve $\hat{x}_2 = 422{,}77345m$ kesin değerlerin farkından,

$$d = \hat{x}_2 - \hat{x}_1 = 54{,}3mm.$$

değerinde elde edilerek,

$$T = \frac{|d|}{s_d} = \frac{|54{,}3|}{3{,}07} = 17{,}69$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra, bu test büyüklüğüne karşılık gelen tablo değeri, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve *f=m+n-2=4+6-2=8* serbestlik derecesine göre ilgili *t*-dağılım tablosundan çift yönlü hipotezle ilgili test sınırı değeri için,

$$q = t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8,0,975} = 2{,}31$$

olarak alınır.

Sonuçta, bu iki değerin karşılaştırmasından; $T>q$ olduğu için, H_o sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: bu iki ölçü kümesinden hesaplanan kesin değerler $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve *f=m+n-2=4+6-2=8* serbestlik derecesine göre eşit oldukları artık söylenemez.

10.3.3. Kuramsal Standart Sapmaları Farklı ve Bilinmeyen İki Bağımsız Ölçü Kümesi Ortalama Değerlerinin Testi

Bu yöntem, her biri farklı kuramsal standart sapma değerine sahip normal dağılımlı iki farklı ölçü kümesinin ortalama değerlerinin eşit olup olmadığının test edilmesinde kullanılmaktadır. Bu nedenle, aynı zamanda bu yönteme iki örnekli *t*-testi de denmektedir. Literatürde, *BEHRENS-FISHER* problemi diye de bilinen bu yöntemde test algoritmasının kurulması oldukça karmaşıktır. Bu yöntemin kuramsal anlamda bir çözümü mevcut değildir. Ancak, bunun yaklaşık bir çözümü *WELCH* tarafından verilmiş şekliyle aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Böyle bir test algoritmasının çözümünde yukarıda anlatılanlara benzer şekilde birinci işlem adımı olarak hem çift taraflı hem de tek taraflı hipotez testi için $d = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$ ölçü dizilerinin ortalamaları arasındaki farkın umut değeri,

$$E\{d\} = |\mu_1 - \mu_2| = 0$$

olmaktadır.

Buna göre kuramsal değerler arasındaki farka göre gerçekleştirilecek bir test irdelemesi için sıfır hipotezi

$$H_0 : E\{d\} = 0 \qquad H_s : E\{d\} \neq 0 \qquad \textit{Çift yönlü hipotez}$$

ve

$$H_0 : E\{d\} = 0 \qquad H_s : E\{d\} > 0 \qquad \textit{Tek yönlü hipotez}$$

biçiminde kurulur. İkinci işlem adımında, her iki ölçü kümesinden her bir ölçü dizisinin kesin değeri olan ortalama değerleri,

$$\hat{x}_1 = \frac{l_{11} + l_{12} + \ldots\ldots + l_{1m}}{m}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{l_{21} + l_{22} + \ldots\ldots + l_{2n}}{n}$$

ve bunların her birine karşılık gelen deneysel standart sapmaları,

$$s_1 = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1]}{m-1}} \quad ; \quad s_2 = \pm\sqrt{\frac{[v_2 v_2]}{n-1}}$$

$$s_{\hat{x}_1} = \frac{s_1}{\sqrt{m}} \quad ; \quad s_{\hat{x}_2} = \frac{s_2}{\sqrt{n}}$$

bağıntılarından hesaplanır. Sonra, ortalamaların farkı

$$d = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$$

şeklinde elde edilerek, d fark değerinin standart sapması da;

$$s_d = \pm\sqrt{s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2} = \pm\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}$$

formülünden hesaplanır. Daha sonra; sıfır hipotezine ilişkin standart dağılımlı rastgele değişken ya da test büyüklüğü değeri,

$$T = \frac{|d|}{s_d}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri, seçilen α yanılma olasılığı ve f serbestlik derecesine göre ilgili *t-dağılım* tablolarından;

- *Tek yönlü test için* : $q = t_{f,\alpha}$
- *Çift yönlü test için de* : $q = t_{f,\alpha/2}$

olarak alınır.

Not: Bu test yönteminin özeliği gereği; burada kullanılmakta olan f *serbestlik derecesi,* diğer test yöntemlerinden farklı olarak değişik bir yolla hesaplanmaktadır. Bu amaçla literatürde yer aldığı biçimiyle, iki farklı değişik formül kullanılmaktadır. Uygulamada bu amaca yönelik kullanılmakta olan bağıntılar aşağıdaki gibi verilmektedir. Bu amaçla, mevcut literatürde izlenen yaklaşımlar:

1. yol: f *serbestlik derecesinin hesaplanış biçimi için,*

$$c = \frac{s_{\hat{x}_1}^2}{s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2} \quad \text{olmak üzere,} \quad f = \frac{1}{\dfrac{c^2}{m-1} + \dfrac{(1-c)^2}{n-1}}$$

formüllerinden elde edilebilir *(Öztürk.-Şerbetçi 1992),*

2. yol: f *serbestlik derecesinin* bir diğer hesaplanış biçimi de literatürde *Welch-Satterthwaite* formülü olarak bilinen, $f_1 = m-1$ ve $f_2 = n-1$ her bir ölçü grubundaki fazla ölçü sayısı*(serbestlik derecesi)* olmak üzere,

$$f = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{m} + \dfrac{s_2^2}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{s_1^2}{m}\right)^2 /(m-1) + \left(\dfrac{s_2^2}{n}\right)^2 /(n-1)} \quad \text{ya da} \quad f = \frac{f_1 f_2 (s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2)^2}{f_1 s_{\hat{x}_2}^4 + f_2 s_{\hat{x}_1}^4}$$

formüllerinden hesaplanabilmektedir (*en.Wkipedia.Org/Wiki/Behrens-Fisher).*

Sonuçta; bu test büyüklüğü ile yukarıda verilmiş formüllerden hesaplanacak f serbestlik derecesi değeri kullanılarak ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre *t-* dağılım tablolarından alınacak bir sınır değerleri ile karşılaştırılır.

Sonuçta, her iki değer arasında yapılan bir karşılaştırma neticesinde, eğer $T<q$ ise H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve f serbestlik derecesine göre; her iki ölçü grubunun ortalama değerleri birbirine eşit alınabilir.

Tersi durumda; eğer $T>q$ ise H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir ve tersi yönde bir yorum yapılır.

10.4. Kuramsal Standart Sapmaları Farklı ve Bağımlı *(Eşli)* Ölçü Çiftleri Kümesi Ortalama Değerlerinin Testi

Bu test yöntemi, her biri normal dağılımda olan ve $n > 30$ elemandan oluşan bağımlı iki ölçü çifti kümesinin ortalama değerlerinin karşılaştırılması amacıyla kullanılır. Bu nedenle, buna "*Eşli karşılaştırma test yöntemi"veya (paired samples t-testi)* de denmektedir. Jeodezik uygulamalarda daha çok böyle bir duruma ölçü çiftlerinden elde edilen ortalama değerlerin karşılaştırılmasında ihtiyaç duyulabilir.

Böyle bir problem için, konuyu daha açıklayıcı bir örnek olarak, yüksekliği hatasız olarak bilinen bir nivelman noktasından yüksekliği belirlenmek istenen bir diğer nivelman noktasına bir geçki boyunca *gidiş-dönüş* nivelman ölçüsü şeklinde yükseklik taşıması gerçekleştiriliyor. Bu amaçla, $i = 1,2,....,n$ olacak şekilde n sayıda yapılmış gidiş nivelman ölçüleri l_{1i} ve dönüş ölçü değerleri de l_{2i} olarak elde edilmiştir. Buradan her bir ölçü grubu için,

- *Gidiş ölçülerinin ortalama değeri* : $\hat{x} = \dfrac{[l_{1i}]}{n}$
- *Dönüş ölçülerinin ortalama değeri* : $\hat{y} = \dfrac{[l_{2i}]}{n}$

olarak hesaplanabilir. Böyle bir durumda varsayılan sıfır hipotezi,

* *Çift yönlü hipotez testi için* : $$H_0 : E\{\hat{x}\} = E\{\hat{y}\}$$ $$H_s : E\{\hat{x}\} \neq E\{\hat{y}\}$$

* *Tek yönlü hipotez testi için de* : $$H_0 : E\{\hat{x}\} = E\{\hat{y}\}$$ $$H_s : E\{\hat{x}\} > E\{\hat{y}\}$$ $$E\{\hat{x}\} < E\{\hat{y}\}$$

biçiminde kurulabilir. Bu şekilde kurulmuş bir sıfır hipotezinin "*Eşli karşılaştırma test yöntemi veya (paired samples t-testi)* olarak irdelenebilmesi için standart *t*-dağılımındaki rastgele değişken ya da test büyüklüğü,

$$t = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{s_{(\hat{x}-\hat{y})}}$$

bağıntısından hesaplanır.

Burada geçen $s_{(\hat{x}-\hat{y})}$ her bir ölçü kümesinin ortalama değerlerinin farkının deneysel standart sapması, serbestlik derecesi

$$f = n - 1 \quad ; \quad [d] = [l_{1i} - l_{2i}] \quad \text{ve} \quad [dd] = [(l_{1i} - l_{2i})^2]$$

olmak üzere,

$$s = \pm\sqrt{\frac{[dd] - \frac{[d]^2}{n}}{n-1}}$$

deneysel standart sapma değeri kullanılarak

$$s_{(\hat{x}-\hat{y})} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Buna karşılık gelen kuramsal rastgele değişken dağılım değeri ya da diğer adıyla sınır değeri, *t*-dağılım tablosundan $f = n - 1$ serbestlik derecesi ve tek taraflı hipotez testi için doğrudan $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile, Çift yönlü test için de $\alpha/2$ öngörülmüş yanılma olasılığının yarısı kullanılarak $q = t_{f,\alpha}$ ya da $q = t_{f,\alpha/2}$ olarak alınır.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, eğer test büyüklüğünün $t < q$ ise H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ve *f=n-1* serbestlik derecesine göre; her iki ölçü grubunun deneysel ortalama değerleri birbirine eşit alınabilir.

Tersi durumda, yani $t > q$ olması halinde; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi geçerli olur.

Buna göre de tersi yönde bir yorum da $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve *f=n-1* serbestlik derecesine göre; her iki ölçü grubunun deneysel ortalama değerleri birbirine eşit alınamaz şeklinde yapılabilir.

Örnek: Arazide, iki nivelman noktası arasındaki yükseklik farkının geometrik nivelmanla presizyonlu bir biçimde belirlenmek isteniyor. Bu amaçla, noktalar arasında *gidiş* ve *dönüş* nivelman ölçüsü şeklinde yükseklik farkı ölçüsü yapılıyor. Ancak, elde olmayan bazı nedenlerden dolayı böyle bir ölçünün gerçekleştirilmesinde, *gidiş* nivelmanında izlenen geçki yolu ile *dönüş* nivelmanında izlenen geçki yolu birbirinden farklı yerlerden geçecek şekilde seçilmiştir.

Böyle bir ölçme işleminde, *gidiş* ve *dönüş* nivelman ölçü çiftleri arasında alet, ölçüyü yapan kişiler ve geçki boyları yönünden bir fark olmamasına rağmen, *gidiş* ve *dönüş* ölçüleri arasında sadece geçki zeminleri, bitki örtüsü ve meteorolojik koşullar yönünden fark bulunmaktadır. Bu gibi özelliklere sahip nivelman ölçüsü neticesinde elde edilen yükseklik farkı ölçüleri,

Tablo 32: Ölçü çiftleri değerleri

Ölçü	Yükseklik Farkı Ölçüsü		Ölçü	Yükseklik Farkı Ölçüsü	
No	Gidiş	Dönüş	No	Gidiş	Dönüş
1	*32,8823*	*32,8821*	11	*32,8821*	*32,8823*
2	*32,8820*	*32,8818*	12	*32,8824*	*32,8825*
3	*32,8826*	*32,8812*	13	*32,8823*	*32,8820*
4	*32,8820*	*32,8826*	14	*32,8822*	*32,8826*
5	*32,8822*	*32,8813*	15	*32,8818*	*32,8819*
6	*32,8814*	*32,8814*	16	*32,8813*	*32,8820*
7	*32,8812*	*32,8820*	17	*32,8816*	*32,8823*
8	*32,8825*	*32,8824*	18	*32,8817*	*32,8823*
9	*32,8820*	*32,8818*	19	*32,8822*	*32,8815*
10	*32,88219*	*32,8819*	20	*32,8818*	*32,8821*

olarak verilmiştir. Bu şekilde elde edilmiş *gidiş* ve *dönüş* nivelman ölçüleri kümeleri $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile eşit alınabilir mi? veya diğer bir ifade ile *gidiş-dönüş* ölçüleri arasındaki farkın önemli olmadığı kabul edilebilir mi? irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözüm sonuçlarını istatistik olarak irdeleyebilmek için paragraf 10.4 ‘de anlatılanlara benzer bir işlem yolu takıp edilerek önce,

$$H_0 : E\{\hat{x}\} = E\{\hat{y}\}$$
$$H_s : E\{\hat{x}\} \neq E\{\hat{y}\}$$

biçiminde bir sıfır hipotezi kurulur. Daha sonra, böyle bir sıfır hipotezinin istatistik irdelenebilmesi için standart dağılıma sahip ilgili rastgele değişken değeri ya da test büyüklüğü,

- *Gidiş ölçülerinin ortalaması* : $\hat{x} = \frac{[l_{1i}]}{n} = 32,881975$
- *Dönüş ölçülerinin ortalaması* : $\hat{y} = \frac{[l_{2i}]}{n} = 32,882000$

ve Tablo 33 ‘de yapılan ara işlemlerden faydalanılarak,

Tablo 33: Ölçü çiftleri farkı değerlerinin hesabı

Ölçü No	Yükseklik Farkı Ölçüsü		d_i (mm.)	Ölçü No	Yükseklik Farkı Ölçüsü		d_i (mm.)
	Gidiş	Dönüş			Gidiş	Dönüş	
1	*32,8823*	*32,8821*	+0,2	11	*32,8821*	*32,8823*	-0,2
2	*32,8820*	*32,8818*	+0,2	12	*32,8824*	*32,8825*	-0,1
3	*32,8826*	*32,8812*	+1,4	13	*32,8823*	*32,8820*	+0,3
4	*32,8820*	*32,8826*	-0,6	14	*32,8822*	*32,8826*	-0,4
5	*32,8822*	*32,8813*	+0,9	15	*32,8818*	*32,8819*	-0,1
6	*32,8814*	*32,8814*	0,0	16	*32,8813*	*32,8820*	-0,7
7	*32,8812*	*32,8820*	-0,8	17	*32,8816*	*32,8823*	-0,7
8	*32,8825*	*32,8824*	+0,1	18	*32,8817*	*32,8823*	-0,6
9	*32,8820*	*32,8818*	+0,2	19	*32,8822*	*32,8815*	+0,7
10	*32,88219*	*32,8819*	0,0	20	*32,8818*	*32,8821*	-0,3
$[d] = [l_{1i} - l_{2i}] = -0,5$				$[dd] = [(l_{1i} - l_{2i})^2] = 6,13$			

$$s = \pm\sqrt{\frac{[dd] - \frac{[d]^2}{n}}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{6,13 - \frac{(-0,5)^2}{20}}{19}} = \pm 0,5674$$

$$s_{(\hat{x}-\hat{y})} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{20}} = 0,1269$$

olmak üzere,

$$t = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{s_{(\hat{x}-\hat{y})}} = \left| \frac{-0{,}025}{0{,}1269} \right| = 0{,}197$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra, buna test büyüklüğüne karşılık gelen kuramsal dağılım değeri ilgili t-dağılım tablosundan $f = n - 1 = 20 - 1 = 19$ serbestlik derecesine göre çift yönlü test için

$$q = t_{f,\alpha/2} = q = t_{19,0,025} = 2{,}093$$

olarak alınır.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, $t < q$ olduğu için; H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilebilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = n - 1 = 19$ serbestlik derecesine göre; her iki ölçü grubunun deneysel ortalama değerleri birbirine eşit alınabilir.

10.5. Kuramsal standart Sapmaları Eşit ve Bağımlı *(Eşli)* Ölçü Çiftleri Kümesi Farkı Ortalama Değerinin Testi

Bu gibi bir hipotez testinde, ölçü çifti *(Gidiş-dönüş)* şeklinde ölçülmüş verilerden elde edilen eşli ölçü kümelerinin tahmin parametrelerinin karşılaştırılması gerçekleştirilmektedir. Böyle bir işlemde, ölçü çiftleri kümelerinden her birinin kuramsal ortalama değeri;

- *Birinci ölçü kümesi için* μ_1 ,
- *İkinci ölçü kümesi için de* μ_2

değerlerinin birbirne eşit $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ olacağından aralarındaki fark da $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$ olur.

Bu amaçla, $i = 1,2,....,n$ olacak şekilde n sayıda yapılmış gidiş ölçüleri l_{1i} ve dönüş ölçü değerleri de l_{2i} olmak üzere, $d_i = |l_{1i} - l_{2i}|$ her bir ölçü çiftinin karşılıklı farklarından oluşan fark vektörünün $\hat{d} = [d]/n$ ortalaması ya da kesin değeri esas alınarak $E\{\hat{d}\} = 0$ biçimindeki umut değeri her zaman sıfır olacağı varsayımına göre kurulan sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{\hat{d}\} = 0$$
$$H_s : E\{\hat{d}\} > 0$$

şeklinde kurulabilir. Bu biçimde kurulmuş olan bir sıfır hipotezine ilişkin standart dağılımdaki rastgele değişkeni ya da diğer adıyla test büyüklüğü, sıfır hipotezi gereği her kümeye ilişkin kuramsal değerlerin arasındaki $\Delta\mu = 0$ farkının sıfır alınabileceği varsayımından yararlanılarak,

$$t = \frac{|\hat{d}|}{s_{\hat{d}}}$$

olarak tanımlanabilir.

Burada $s_{\hat{d}}$ ölçü çiftleri farkların ortalama değerinin standart sapması, d_i ölçü çifti farklarından $[dd] = d_1^2 + d_2^2 + ... + d_n^2$ biçiminde hesaplananan farkların kareleri toplamı olmak üzere, herhangi bir ölçünün ortalama hatası,

$$s = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}}$$

formülünden hesaplanabilir. Buradan, ölçü çifti farklarının ortalama değerinin ortalama hatası da

$$s_{\hat{d}} = \frac{s}{\sqrt{2n}}$$

olarak hesaplanabilir.

Daha sonra, bu test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri, problemde ön görülmüş $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre ilgili normal tablosundan $z_{\alpha/2}$ olarak alınır.

Bu iki değerin birbirleri ile karşılaştırılmasından, eğer test büyüklüğünün $t < z_{\alpha/2}$ ise H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre; her iki ölçü çiftleri grubu birbirine eşit alınabilir.

Tersi durumda, yani $t > z_{\alpha/2}$ olması halinde; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi geçerli olur ve buna göre de tersi yönde bir yorum yapılır.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre; her iki ölçü çifti grubu değerleri birbirine eşit oldukları artık söylenemez

Örnek: Bir poligonun kenar uzunlukları, aynı koşullarda, aynı alet ve kişi tarafından *(cm.)* incelikte gidiş ve dönüş biçiminde çift yönlü ölçülerek,

Tablo 34: Gidiş-dönüş ölçü çiftleri

Kenar No	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
Gidiş	121,88	78,56	82,77	56,65	92,78	71,44	59,73	72,37
Dönüş	121,89	78,56	82,76	56,67	92,75	71,46	59,76	72,39

değerleri elde edilmiştir. Bu gidiş ve dönüş ölçüleri $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile eşit alınabilir mi? ya da gidiş ve dönüş ölçüleri arasındaki farkın önemli olmadığı kabul edilebilir mi? irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin paragraf 10.5 'de anlatılmış olanlara göre istatistik olarak irdelenebilmesi için çözüm algoritmasının ilk işlem adımı olarak,

$H_0 : E\{\hat{d}\} = 0$: *Gidiş ve Dönüş veri kümesi arasındaki fark önemli değildir.*
$H_s : E\{\hat{d}\} > 0$: *Gidiş ve Dönüş veri kümesi arasındaki fark önemlidir*

biçiminde bir hipotez kurulur.

Sonra bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğünü hesaplamak için, her iki küme elemanları arasında karşılıklı farklar alınarak Tablo 35 'deki ara işlemler yapılır.

Tablo 35 'den de açıkca görüleceği gibi yapılan hesaplamalardan, bir gidiş ya da dönüş ölçüsünün ortalama hatası

$$s = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \sqrt{\frac{32}{16}} = \pm 1.4142$$

ve ölçü çifti farklarının ortalama değerinin ortalama hatası da

$$s_{\hat{d}} = \frac{s}{\sqrt{2n}} = \frac{1.4142}{\sqrt{16}} = \frac{1.4142}{4} = \pm 0.3536$$

olarak hesaplanır.

Tablo 35.: gidiş-dönüş ölçü çiftleri farkları

Kenar no	gidiş ölçüleri	dönüş ölçüleri	d gidiş-dönüş farkları	d^2
1-2	121,88m.	121,89m.	1cm.	1
2-3	78,56	78,56	0	0
3-4	82,77	82,76	-1	1
4-5	56,65	56,67	2	4
5-6	92,78	92,75	-3	9
6-7	71,44	71,46	2	4
7-8	59,73	59,76	3	9
8-9	72,37	72,39	2	4
Farların ve karelerinin toplamı			$[d]=6$	$[dd]=32$

Daha sonra, sıfır hipotezi ile ilgili t test büyüklüğü de $\hat{d}=[d]/n=6/8=0{,}75cm$ değerinden faydalanılarak,

$$t=\frac{|\hat{d}|}{s_{\hat{d}}}=\frac{0{,}75}{0{,}3536}=2{,}121$$

olarak hesaplanabilir.

Sonuçta, buna karşılık gelen sınır değeri daha önceden ön görülmüş olan $\alpha=0{,}05$ yanılma olasılığına göre ilgili normal dağılım tablosundan $z_{\alpha/2}=1{,}96$ olarak alınarak her iki değer karşılaştırılır.

Burada, her iki değer arasında yapılacak bir karşılaştırma neticesinde $t>z_{\alpha/2}$ olduğundan; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum; Burada, $\alpha=0{,}05$ yanılma olasılığına göre her iki ölçü çifti grubunun birbirine eşit olduğu söylenemez.

10.6. Kuramsal Standart Sapmaları Eşit ve Korelasyonlu Bağımlı*(Eşli)* Ölçü Çiftleri Farkı Küme Ortalama Değerinin Testi

Böyle bir hipotez testinin gerçekleştirilmesinde; paragraf 10.5 ‘de anlatılanların bir benzeri olarak, önce $i=1,2,....,n$ n sayıda yapılmış l_{1i} gidiş ve l_{2i} dönüş ölçü değerlerinin $d_i = |l_{1i} - l_{2i}|$ farklarından oluşan fark vektörünün $\hat{d} = [d]/n$ biçimindeki ortalama ya da kesin değerinin $E\{\hat{d}\} = 0$ olacağı varsayımına göre sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{\hat{d}\} = 0$$
$$H_s : E\{\hat{d}\} > 0$$

biçiminde kurulur. Daha sonra bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü,

$$t = \frac{|\hat{d}|}{s_{\hat{d}}}$$

şeklinde hesaplanır.

Burada $s_{\hat{d}}$ farkların ortalama değerlerinin standart sapması; eşit korelasyon değeri de göz önüne alınarak, d_i ölçü çifti farklarından

$$[dd] = d_1^2 + d_2^2 + ...+ d_n^2$$

olmak üzere, aralarında r_{12} kadar sabit bir korelasyon olan her bir ölçü çift ortalama değerinin

$$s = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}\left(\frac{1+r_{12}}{1-r_{12}}\right)}$$

ortalama hatasından

$$s_{\hat{d}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

biçiminde hesaplanır.

Daha sonra, paragraf 10.5 'de yapılan işlemlere benzer bir yol izlenerek sıfır hipotezinin irdelenmesi amacıyla $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılım tablosundan temin edilen $z_{\alpha/2}$ sınır değeri kullanılarak, her iki değer karşılaştırılır.

Böyle bir karşılaştırma sonucunda test büyüklüğünün $t < z_{\alpha/2}$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre her iki ölçü çiftleri grubu birbirine eşit alınabilir denir.
Tersi durumda, yani $t > z_{\alpha/2}$ olması halinde; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi geçerli olur ve buna göre de tersi yönde bir yorum yapılır.

Yorum; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre; her iki ölçü çifti grubu birbirine eşit olduğu söylenemez

Örnek: Bir önceki örnekte verildiği gibi bir poligonun kenar uzunlukları, aynı koşullarda, aynı alet ve kişi tarafından *(cm.)* incelikte gidiş ve dönüş biçiminde çift yönlü ölçülerek,

Tablo 36 : Korelasyonlu gidiş-dönüş ölçü çiftleri

Kenar No	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9
Gidiş	121,88	78,56	82,77	56,65	92,78	71,44	59,73	72,37
Dönüş	121,89	78,56	82,76	56,67	92,75	71,46	59,76	72,39

değerleri elde edilmektedir. Bu ölçü değerleri arasında $r_{12} = 0{,}6$ gibi sabit bir korelasyon değeri olduğu bilindiğine göre $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile gidiş ve dönüş ölçüleri eşit alınabilir mi? İrdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözümü için paragraf 10.6 'da anlatılmış olanlara benzer yönde hareket ederek,

$H_0 : E\{\hat{d}\} = 0$: *Gidiş ve Dönüş veri kümesi arasındaki fark önemli değildir.*
$H_s : E\{\hat{d}\} \neq 0$: *Gidiş ve Dönüş veri kümesi arasındaki fark önemlidir*

biçiminde bir sıfır hipotezi çift yönlü olarak kurulur.

Daha sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin standart dağılıma sahip rastgele değişken değeri ya da test büyüklüğü Tablo 37 'den de görülebileceği gibi gidiş dönüş ölçüleri farkından hesaplanan $[dd] = 32$ değerinden ve gözlemler arsındaki korelasyon değerinin de dikkate alınması ile

$$s = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}\left(\frac{1+r_{12}}{1-r_{12}}\right)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{8}\left(\frac{1+0.6}{1-0.6}\right)} = \pm 4$$

ve

$$s_{\hat{d}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \pm 1{,}414$$

elde edilen standart sapma değeri kullanılarak

$$\hat{d} = [d]/n = 6/8 = 0,75cm$$

farklarının ortalamasından faydalanılarak ilgili test büyüklüğü değeri,

$$t = \frac{|\hat{d}|}{s_{\hat{d}}} = \frac{0,75}{1,414} = 0,530$$

olarak bulunur.

Tablo 37 : Ölçü çiftleri farklarının hesabı

Kenar No	Ölçüleri değerleri		Gidiş-dönüş farkları	
	Gidiş	Dönüş	d	d^2
1-2	*121,88m.*	*121,89m.*	*1cm.*	*1*
2-3	*78,56*	*78,56*	*0*	*0*
3-4	*82,77*	*82,76*	*-1*	*1*
4-5	*56,65*	*56,67*	*2*	*4*
5-6	*92,78*	*92,75*	*-3*	*9*
6-7	*71,44*	*71,46*	*2*	*4*
7-8	*59,73*	*59,76*	*3*	*9*
8-9	*72,37*	*72,39*	*2*	*4*
Farların ve karelerinin toplamı			$[d] = 6$	$[dd] = 32$

Bu test büyüklüğünü $\alpha = 0,05$ yanılma olasılık değerine göre istatistik hipotaz testi ile irdeleyebilmek için, buna karşılık gelen sınır ya da kritik değeri ilgili normal dağılım tablosundan $\alpha/2 = 0,025$ çift yönlü yanılma olasılığına göre $z_{\alpha/2} = 1,96$ alınır.

Bu işlemlerin devamında, test büyüklüğü ve tablo değerlerinin; birlikte her ikisinin karşılaştırılmasından;

$t < z_{\alpha/2}$ olduğu için H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir. Bunun neticesinde de aşağıdaki yorum yapılabilir.

Yorum; $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre; her iki ölçü çifti grubu birbirine eşit olduğu veya alınabileceği söylenebilir.

11. BÖLÜM

VARYANS TESTLERİ

11. VARYANSLARLA İLGİLİ HOMOJENLİK TESTLERİ

Günümüzde uygulamalı bilimlerden sayılan, mühendislik disiplinleri, orman, ziraat, ekonomi gibi birçok sosyal ve deneysel biyoloji, fizik, kimya gibi temel bilimler ya da tıp gibi diğer sağlık bilimlerinde çeşitli uygulama alanları bulan iki veya daha fazla sayıdaki örnekleme veri kümesinden elde edilmiş ortalama değerlerin arasındaki farkın anlamlı olup olmadıklarının incelenmesi konusu, istatistik hipotez testi uygulamalarının üzerinde yoğunlaşmış temel konulardan biri olmaktadır. Pratikte, bu gibi konuların sözü edilmiş olan veri irdelemesine bir takviye ya da etkin bir anlam kazandırması bakımından eskiden beri farklı şekil ve yaklaşımlarla yaygın bir biçimde kullanılmış olan varyans analizi tekniklerinden beklenilen yararların sağlanabilmesi için veri kümelerinde normallik, varyansların homojenliği, gözlemlerin bağımlı ya da bağımsızlığı ve bunların etkilerinin eklenebilir olması gibi bazı varsayımların büyük önem taşımış olduğu ayrıca bilinmektedir. Ne var ki bir hipotez testinin uygulanmasında bunlardan deneysel veri inceleme sonuçlarının doğruluğunu en fazla etkileyen varsayımlar, verilerin bağımlı ya da bağımsız olmaları yanında normallikleri ile varyanslarının homojenliği en önemli görevi üstlenmektedir. Pratikte bu gibi sorunlara bir çözüm bulmak amacıyla; böyle bir problem, deneysel varyans değerlerinin sayısına göre farklı şekillerde ele alınıp, değişik yaklaşımlarla değerlendirilmektedir. Bu gibi yaklaşımlar gerek konuları bakımından gerekse dayanmış oldukları kuramsal temelleri yönünden farklı isimler altında ele alınıp incelenebilirler.

Burada, bu gibi durumlara bir cevap teşkil etmesi bakımından varyansların analizinde kullanılabilecek farklı yöntem ya da yaklaşımlar ele alınarak, her biri kısaca açıklanacaktır.

11.1. Kuramsal Standart Sapmaları Eşit Ölçülerinden Elde Edilen İki Deneysel Standart Sapma Değerinin Eşdeğerlilik Testi

Kuramsal standart sapma değerleri eşit ölçülerinden farklı yollarla elde edilmiş iki deneysel standart sapma değerlerinin karşılaştırılması testinde, kullanılan kuramsal tablo değerlerine göre farklı irdeleme şekilleri mevcuttur. Burada, özel tablo değerlerine göre tanımlanmış olan *"ardışık ölçü farklarından hesaplanan ortalama hatanın testi"* ile *"F-Fisher dağılım tablo değerlerine göre gerçekleştirilen diğer varyans testleri*" yöntemleri sırası ile ele alınıp her biri örneklemeli bir biçimde verilecektir.

11.1.1. Ardışık Ölçü Farklarından Hesaplanan Ortalama Hatanın Testi

Bu yöntemde, bir büyüklükle ilgili n sonlu sayıda yapılmış gözlemlerden yansız öncül bir varyans tahmini, ardışık ölçü farklarının kullanılması ile hesaplanabilir. Normal dağılıma sahip n sayıdaki x_i ; $i = 1,2,.....,n$ ölçü değeri için böyle bir varyans tahmini formülü, *1942* yılında *HART* tarafından,

$$s_H^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{2(n-1)}$$

biçiminde verilmiştir.

Neticede, bir ölçü kümesi için öncül *(a piriori)* bir varyans değerinin bu formülün de kullanılması ile ardışık ölçü farklarından kolayca hesaplanabilmektedir.

Ardışık ölçü farklarından hesaplanacak bir varyansın testi için burada genel anlamda söylenmiş bazı tanımlayıcı bilgilere rağmen, bu yöntemde istatistik olarak irdelenmek istenen esas konu; *HART* tarafından yukarıda verilen formülle tanımlanmış olan s_H^2 varyans değerinin belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre *En küçük kareler* parametre kestirimi neticesinden hesaplanabilen,

$$s^2 = \frac{[vv]}{n-1}$$

soncul *(a posteriori)* deneysel varyans değerine eşit alınıp alınamayacağıdır. Bu amaçla, *HART 1942* 'ye göre kurulacak bir sıfır hipotezi

$$H_0 : E\{s_H^2\} = E\{s^2\}$$
$$H_s : E\{s_H^2\} < E\{s^2\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sıfır hipotezi ile ilgili standart dağılımlı rastgele değişken ya da test büyüklüğü de,

$$T = Min\left(\frac{s_H^2}{s^2}, \frac{s^2}{s_H^2}\right)$$

bağıntısından hesaplanır.

Tablo 38: $Min\left(\frac{s_H^2}{s^2}, \frac{s^2}{s_H^2}\right)$ *Oranının kuramsal olasılıkları*

n	$\alpha = 1 - S$ Yanılma olasılıkları			n	$\alpha = 1 - S$ Yanılma olasılıkları		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	*0,295*	*0,313*	*0,390*	13	*0,295*	*0,431*	*0,578*
5	*0,208*	*0,269*	*0,410*	14	*0,311*	*0,447*	*0,591*
6	*0,182*	*0281*	*0,445*	15	*0,327*	*0,461*	*0,603*
7	*0,185*	*0,307*	***0,468***	16	*0,341*	*0,475*	*0,614*
8	*0,202*	*0,331*	*0,491*	17	*0,355*	*0,487*	*0,624*
9	*0,221*	*0,354*	*0,512*	18	*0,368*	*0,499*	*0,633*
10	*0,241*	*0,376*	*0,531*	19	*0,381*	*0,510*	*0,642*
11	*0,260*	*0,396*	*0,548*	20	*0,393*	*0,520*	*0,650*
12	*0,278*	*0,414*	*0,564*				

Bu test büyüklüğünün hesabı formülünden, varyansların oranından küçük değerli olanı test büyüklüğü seçilir ve bunun Tablo 38 'de daha önceden öngörülmüş $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre verilmiş olan oranlarının kuramsal olasılıkları tablosundan alınacak bir kritik değerle karşılaştırması geçekleştirilir.

Burada; Tablo 38 'in incelenmesinden görüleceği gibi; tablonun gerek düzenlenmesinde, gerekse kullanılmasında birinci sütununda yer alan n ölçü sayıları ile birinci satırındaki farklı $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılık değerleri anahtar görevi üslenmektedir.

Sonuçta, bu $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve n veri sayısına uygun olarak Tablo 38'den alınmış böyle bir q kritik değerinin T test büyüklüğü ile karşılaştırılmasından; eğer $T \le q$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: n ölçü sayısı ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile bu iki farklı yoldan hesaplanan ortalama hataların eşit alınamayacakları hükmü geçerli olur. Tersi durumda, eşit alınabilecekleri yönünde bir karar verilir ve neticede bu kararın yönünde ikinci bir yorum yapılır.

Örnek: Bir büyüklükle ilgili $n=7$ adet ölçü yapılarak,

$$l = [11{,}1 \quad 11{,}3 \quad 11{,}2 \quad 11{,}4 \quad 11{,}2 \quad 11{,}5 \quad 11{,}4]$$

değerleri elde edilmiştir. Bu ölçülerden; ardışık farklar alınarak hesaplanacak bir s_H öncül ortalama hatanın, ölçülerin direkt ölçüler dengelemesi yöntemiyle dengelenmesi neticesinde elde edilecek olan s soncul ortalama hatasına $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacağının irdelenmesi istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözümü amacıyla, burada yapılmış olan bir direkt ölçüler dengelemesi neticesinde deneysel varyans değeri

$$s^2 = \frac{[vv]}{n-1} = \frac{[vv]}{7-1} = \frac{0{,}12}{6} = 0{,}02$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde, buna karşılık gelen ilk ölçülerin ardışık farklarından bir diğer varyans değeri olan öncül varyans değeri de *HART, 1942* formülüne göre

$$s_H^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2}{2(n-1)} = \frac{(0{,}2)^2+(-0{,}1)^2+(0{,}2)^2+(-0{,}2)^2+(0{,}3)^2+(-0{,}1)^2}{2(n-1)} = \frac{0{,}23}{12} = 0{,}0192$$

olarak elde edilir. Burada her biri farklı iki yoldan hesaplanmış, ancak kuramsal değerleri aynı olan varyansların eşit alınıp alınamayacaklarına ilişkin irdelenmesi istenen sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{s_H^2\} = E\{s^2\}$$
$$H_s : E\{s_H^2\} < E\{s^2\}$$

biçiminde kurulur. Bu hipotezle ilgili standart dağılıma sahip rastgele değişken ya da diğer bir ifade ile test büyüklüğü, $T<0$ olacak şekilde,

$$T = \frac{s_H^2}{s^2} = \frac{0{,}0192}{0{,}02} = 0{,}96$$

hesaplanır.

Sonuçta, $n=7$ ve $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile Tablo 38 ‘de verilmiş olan

s_H^2 / s^2 oranının kuramsal olasılıkları tablosundan sınır değeri *q=0,468* olarak alınır. $T = 0.96 > q=0,468$ olduğundan H_0 hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: $n = 7$ ölçü sayısı ve $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına aynı ölçülerden iki farklı yol takıp edilerek hesaplanmış varyans değerlerinin ya da ortalama hatalarının eşit oldukları söylenenebilir.

11.1.2. Kuramsal Standart Sapmaları Eşit Ölçülerden Elde Edilmiş İki Deneysel Standart Sapma Değerinin Karşılaştırılması Testi

Farklı iki ölçü dizisinin duyarlık yönünden eşdeğer olup olmadıklarının belirlenmesi, uygulamasında sıkça karşılaşılan bir diğer varyans analizi problemi olmaktadır. Örneğin, bir dengeleme probleminin çözümünde, ağırlıkların seçimi ya da karesel ortalama hataları farklı olan ölçü gruplarının birlikte ele alınarak eşit ya da farklı duyarlıklı değerlendirilmesinde verilecek kararlar gibi; pratikte böyle sorunlarla çoğu zaman karşılaşmak olası bir durumdur. Pratikte, bu gibi sorunları açıklığa kavuşturmak maksadı ile gerçekleştirilecek bir varyans analizinde, test işleminin algoritmasının kurulup veya çözülmesinde deneysel standart sapmalardan faydalanılmaktadır. Bu amaçla; birinci ölçü kümesinin deneysel standart sapması ve serbestlik derecesi; s_1 ve f_1, ikinci ölçü kümesinin deneysel standart sapması ve serbestlik derecesi ; s_2 ve f_2 olmak üzere, umut değerleri, $\sigma_1^2 = E\{s_1^2\}$ ve $\sigma_2^2 = E\{s_2^2\}$ olarak yazılır. Bu durumda hipotez testi,

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \qquad H_s : \sigma_1 \neq \sigma_2 \qquad \textit{Çift yönlü hipotez}$$

ve

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 \qquad H_s : \sigma_1 > \sigma_2 \qquad \textit{Tek yönlü hipotez}$$

olarak kurulur.

Burada; tekrar hatırlatmak gerekirse; tek yönlü test ancak standart sapmalarla ilgili önceden başka kaynaklardan bir bilgi edinilmiş ise kullanılabilir. Aksi takdirde önceden verilmiş böyle bir bilginin bulunmaması halinde, sadece ölçü dizilerinden elde edilen verilerin deneysel standart sapma değerlerinin bilinmesi durumunda karşılaştırmada her zaman çift yönlü hipotez kurularak irdelenir. Böyle bir sıfır hipotezinin öngörülen $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre irdelenmesinde kullanılacak test büyüklüğü,

$$T = \max\left\{\frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{s_2^2}{s_1^2}\right\}$$

olacak şekilde formülünden hesaplanır. Sonra payın serbestlik derecesi f_1, paydanın serbestlik derecesi de f_2 olmak üzere, *F-Fisher* dağılım tablolarından,

$$q = F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \quad ; \quad \textit{Tek yönlü hipotez için,}$$

$$q = F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} \quad ; \quad \textit{Çift yönlü hipotez için}$$

sınır değerleri bulunur.

Sonuçta her iki değerin karşılaştırmasından $T \leq q$ ise; H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret olunur.

Yorum: bu iki deneysel standart sapma α yanılma ve f_1, f_2 serbestlik derecelerine göre eşit alınabilir denir.

Tersi durumda; $T \geq q$ ise; H_0 ret, H_s kabul edilir.

Yorum: bu iki deneysel standart sapma değerleri α yanılma ve f_1, f_2 serbestlik derecelerine göre eşit alınamaz denir.

Örnek: Ülke nirengi ağının *1. derece* noktalarından birindeki bir açı farklı iki zaman aralığında ölçülmektedir. t_1 anında bir *Teodolit* kullanarak 4 kez ve t_2 anında bir başka *Teodolit* kullanılarak 6 kez ölçülüyor. Her iki ölçme sonucunda,

Tablo 39 : her iki teodolitle t_1 ve t_2 zamanında yapılmış açı ölçüleri

t_1 zamanı	34,23688	,23684	,23674	,23667		
t_2 zamanı	34,23669	,23661	,23668	,23662	,23664	,23666

ölçü değerleri elde edilmiştir (Tablo 39). Bu geçen süre içerisinde açının değerleri arasında anlamlı bir değişmenin olup olmadığının $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ile irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Burada iki türlü istatistik hipotez testinin uygulanması gerekir. Bunlardan birincisi, açının kesin değerleri arasıdaki farkın anlamlı olup olmadığının irdelenmesi için kullanılacak hipotez testinde, her bir ölçü grubunun standart sapmalarının eşdeğer olup olmadığının incelenmesini irdeleyen *varyans testi*dir. İkincisi de açının her iki zaman peryotunda ölçülmüş değerlerden elde edilecek kesin değerlerinin arasındaki farkın anlamlı olup olmadığını irdelemeye yarayan *anlamlılık* testidir. Bu amaçla, her iki hipotez testi çözümü için her bir ölçü dizisine ilişkin kesin açı değerleri kendi içlerinde bir dolaysız ölçüler dengelemesi çözümü gerçekleştirilerek ya da ortalama almak suretiyle,

t_1 *anında yapılan 4 adet açı ölçüsünden :* $\hat{x}_1 = \dfrac{[l_{1i}]}{6} = 34^g,23678$

t_2 *anında yapılan 6 adet açı ölçüsünden :* $\hat{x}_2 = \dfrac{[l_{2i}]}{6} = 34^g,23665$

olarak hesaplanır. Böyle bir hesaplama sonucunda, sırası ile t_1 ve t_2 ölçü periyotları için yapılmış gözlemlerin deneysel standart sapma değerleri,

$$s_1 = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1]}{n_1 - 1}} = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1]}{4-1}} = \pm\sqrt{\frac{[v_1 v_1]}{3}} = \pm 0{,}93^{cc}$$

$$s_2 = \pm\sqrt{\frac{[v_2 v_2]}{n_2 - 1}} = \pm\sqrt{\frac{[v_2 v_2]}{6-1}} = \pm\sqrt{\frac{[v_2 v_2]}{5}} = \pm 0{,}32^{cc}$$

olarak elde edilir. Daha sonra bu değerlerden faydalanarak, kesin değerlerin yani ölçü küme ortalamaların deneysel standart sapma değerleri,

$$s_{\hat{x}_1} = \frac{s_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{0.93}{\sqrt{4}} = \pm 0{,}47^{cc};\, s_{\hat{x}_2} = \frac{s_2}{\sqrt{n_2}} = \frac{0.32}{\sqrt{6}} = \pm 0{,}13^{cc}$$

olarak bulunur. Bir sonraki adımda, hesaplanan bu değerlerden faydalanarak her iki test için aşağıdaki hipotez testlerinin çözümüne geçilir.

a) Ölçülerin s_1 ve s_2 deneysel standart sapmalarının eşdeğer olup olmadığını irdeleyen varyans testi

Böyle bir test için önce, s_1 ve s_2 deneysel standart sapma değerleri arasında ölçülerden başka hiçbir kaynaktan alınmış bir bilgi bulunmadığı için,

$$H_0: \quad E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = \sigma^2$$
$$H_s: \quad E\{s_1^2\} \neq E\{s_2^2\}$$

şeklinde çift taraflı bir hipotez kurulur. Sonra, bu hipotezle ilgili bir test büyüklüğü, $T > 1$ olacak şekilde,

$$T = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 8{,}39$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra; çift taraflı bir hipotez için, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile *F-Fisher* dağılım tablolarından $q = F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2} = F_{3,5,0,975} = 7{,}75$ gibi bir sınır değeri alınır.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, $T > q$ sonucu ile karşılaşılmış olunduğundan; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilmektedir.

Yorum: her iki ölçü dizisinin standart sapmaları $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile farklı olmaktadır denir.

b) $d = \hat{x}_1 - \bar{x}_2$ kesin değerler farkının anlamlı olup olmadığının testi

Varyans testiyle ilgili H_0 sıfır hipotezinin geçersiz sadece H_s seçenek hipotezinin geçerli olduğu durumlarda $d = \hat{x}_1 - \bar{x}_2$ kesin değerler farkının anlamlı olup olmadığının istatistik irdelenmesi de aşağıdaki çözüm süreci izlenir. Bu amaçla, konuyla ilgili ikinci bir sıfır hipotezi de,

$$H_0: E\{d\} = 0$$
$$H_s: E\{d\} \neq 0$$

şeklinde çift yönlü olarak kurulur. Sonra, bu hipotezle ilgili test büyüklüğü,

$$d = \hat{x}_1 - \hat{x}_2 = -1.3^{cc}$$

deneysel ortalama değerleri farkının ve deneysel farkın standart sapması da

$$s_d = \pm\sqrt{s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2} = \pm 0{,}49^{cc}$$

olarak elde edildikten sonra,

$$T = \frac{|d|}{s_d} = 2{,}65$$

olarak hesaplanır. Daha sonra test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri,

$$c = \frac{s_{\hat{x}_1}^2}{s_{\hat{x}_1}^2 + s_{\hat{x}_2}^2} = 0{,}926$$

olmak üzere,

$$f = \frac{1}{\frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}} = 3{,}48 \approx 3$$

serbestlik derecesine ve $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre *t*-dağılım tablolarından, çift yönlü bir test için $q = t_{f,\alpha/2} = t_{3,0,975} = 3{,}18$ olarak alınır.

Sonuçta: her iki standart dağılıma sahip rastgele değişkenin birbiri ile karşılaştırılmasından $T < q$ olduğundan, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: her iki kümeden hesaplanan kesin ya da ortalama değerlerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = 3$ serbestlik derecesine göre birbirine eşit alınabilecekleri söylenebilir.

Not: Her iki varyansın eşit alınabileceği varsayımının geçeli olduğu hallerde benzer bir çözüm serbestlik derecesi $f = n_1 + n_2 - 2$ formülünden hesaplanarak aynı işlem yolunun takip edilmesi ile gerçekleştirilir.

11.1.3. Pitman Testi

Pitman hipotez testi yönteminde, her biri normal dağılıma sahip bağımlı iki farklı deneysel varyansın aynı kuramsal varyans değerine sahip olup olmadıklarının istatistik irdelenmesi konu edinmektedir. Ancak, pratikte böyle bir testin kolayca uygulanabilmesi ve aynı zamanda geçerli olabilmesi için her bir deneysel veri kümesinin eleman sayıları eşit ve hiçbirinde eksik bir gözlemin bulunmaması gerekir.

Bu amaçla, her iki deneysel varyansın belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre eşit alınıp alınamayacağı için kurulması gereken sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = \sigma_0^2$$
$$H_s : E\{s_1^2\} \neq E\{s_2^2\}$$

biçiminde yazılır. Sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü,

$$F = \max\left[\frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{s_2^2}{s_1^2}\right]$$

en büyüğü F değeri alınarak hesaplanan varyansların oranı değerinden faydalanılarak,

$$t = \frac{(F-1)\sqrt{(n-2)}}{2\sqrt{F(1-r^2)}}$$

bağıntısından elde edilir. Burada,

- *r : Her iki veri kümesi arasındaki korelasyon katsayısını,*
- *n : Her iki veri kümesindeki ($n = n_1 + n_2$) toplam eleman sayısı dır.*

Böylece standart *t*-dağılımına sahip olan test büyüklüğüne karşılık gelen kuramsal standart *t*-dağılım değeri ya da sınır değeri, $f = n - 2$ serbestlik derecesine ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre ilgili t-dağılım tablosundan çift yönlü olarak $t_{f,\alpha/2}$ alınır.

Her iki değerin karşılaştırılması neticesinde, eğer $t \leq t_{f,\alpha/2}$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesi $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve $f = n - 2$ serbestlik derecesine göre eşit varyanslı oldukları söylenebilir.

Tersi durumda eğer $t > t_{f,\alpha/2}$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesi $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve $f = n - 2$ serbestlik derecesine göre eşit varyanslı oldukları söylenemez denebilir.

Örnek: Arazide, bir noktada kurulan elektronik uzaklık ölçer aletle aynı anda ve yönde iki farklı kenarın uzunlukları ölçülerek,

Tablo 40: *Her iki kenara ilişkin EDM ile ölçülen uzunluk değerleri*

l_1	*716,3286m,*	*,3280*	*,3277*	*,3282*	*,3272*	*,3281*	*,3274*	*,3268*	*,3270*	*,3280*
l_2	*516,7445m,*	*,7441*	*,7435*	*,7432*	*,7448*	*,7436*	*,7443*	*,7428*	*,7444*	*,7448*

değerleri elde ediliyor (Tablo 40). Her iki uzunluk ölçülerinin, $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ile eşit duyarlıkta alınıp alınamayacakları irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemi istatistik olarak irdeleyebilmek için her iki uzunluk ölçü grubu aynı anda, aynı alet ve kişiler tarafından ölçülmüş olduklarından fiziksel korelasyonlu değerler olmaktadırlar. Bu nedenle, bu uzunluk değerlerinin her birinden ayrı olarak hesaplanacak deneysel varyans değerleri de korelasyonlu büyüklükler olmaktadır. Neticede, bunların eşit duyarlıkta alınıp alınamayacakları ancak Pitman *t testi* ile irdelenebilir.

Bu amaçla kurulacak bir sıfır hipotez testi,

- s_1^2 *:* l_1 *kenar uzunlu ölçülerinin deneysel varyans değeri,*
- s_2^2 *:* l_2 *kenar uzunlu ölçülerinin deneysel varyans değeri*

olmak üzere,

$$H_0 : E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = \sigma_0^2$$
$$H_s : E\{s_1^2\} \neq E\{s_2^2\}$$

olarak yazılır.

Bu gibi bir sıfır hipotezinin geçerliliğini $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı değerine göre istatistik anlamda irdeleyebilmek için bu sıfır hipoteziyle ilgili test büyüklüğünü hesaplayabilmek amacıyla öncelikle,

- Her biriyle ilgili ortalama ve deneysel varyans değerleri

$$\hat{x}_1 = \frac{[l_1]}{n_1} = 716{,}3277 \qquad s_1^2 = \frac{[v_1v_1]}{n_1 - 1} = \frac{304}{10-1} = 33{,}778$$

$$\hat{x}_2 = \frac{[l_2]}{n_2} = 516{,}7440 \qquad s_2^2 = \frac{[v_1v_1]}{n_2 - 1} = \frac{428}{10-1} = 47{,}556$$

- Aralarındaki kovaryans ve korelasyon değerleri

$$s_{12} = \frac{[v_1v_2]}{n_1 - 1} = \frac{[v_1v_2]}{n_2 - 1} = \frac{47}{10-1} = 5{,}222$$

$$r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = \frac{[v_1v_2]}{\sqrt{[v_1v_1][v_2v_2]}} = \frac{47}{\sqrt{(304)(428)}} = 0{,}130$$

olarak hesaplanır. Daha sonra buradan sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğü,

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{47.556}{33.778} = 1{,}408$$

ara değerinden ve $n = n_1 + n_2 = 10 + 10 = 20$ ölçü sayısından faydalanılarak,

$$t = \frac{(F-1)\sqrt{(n-2)}}{2\sqrt{F(1-r_{12}^2)}} = \frac{(1{,}408-1)\sqrt{(20-2)}}{2\sqrt{1{,}408(1-0{,}130^2)}} = \frac{1{,}731}{1{,}177} = 1{,}471$$

olarak elde edilir.

Buradan, sıfır hipotezinin irdelenebilmesi için bu test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri, $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına ve $f = n - 2 = 20 - 2 = 18$ serbestlik derecesine göre ilgili t-dağılım tablosundan $\alpha/2 = 0{,}025$ çift yönlü yanılma olasılığı değerine göre $t_{f,\alpha/2} = t_{18,0{,}025} = 2{,}101$ olarak alınır. Daha sonra bu iki değerin birbiri ile karşılaştırılmasından, $t < t_{f,\alpha/2}$ olduğu için H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesinin $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ve $f = n - 2 = 18$ serbestlik derecesine göre eşit varyanslı oldukları kabul edilebilir.

11.2. İkiden Fazla Sayıdaki Deneysel Standart sapma Değerlerinin Karşılaştırılması Testi

Her biri normal dağılıma sahip $n \geq 30$ elemanlı veri kümesinden üretildikleri kabul edilen ikiden daha fazla sayıdaki deneysel standart sapma değerinin seçilen bir α yanılma olasılığına göre istatistik olarak irdelenebilmesi için uygulamada farklı istatistik hipotez test yöntemleri kullanılmaktadır. Jeodezik veri irdelemesinde de büyük önemi olan ve aynı zamanda bu gibi konularından biri olan varyanslarını homojenliği ile ilgili kullanılmakta olan farklı test yöntemleri,

- $F_{\max}$ *hipotez testi,*
- $G_{\max}$ *hipotez testi,*
- *Bartlett hipotez testi*
- *Levene hipotez testi*

şeklinde sıralanabilir.

Bu varyans hipotez testlerinin daha sonra yapılacak incelemelerinden de görülebileceği gibi aralarındaki en önemli fark, belli bir istatistik anlamlılık seviyesine göre irdelenecek standart sapma değerlerinin sayıları yanında her biriyle ilgili $f = n - u$ serbestlik derecelerinin eşit olup olmaması ve ayrıca dağılımlarının bilinmesi de söz konusu olmaktadır. Burada, bu gibi yöntemler ele alınarak açıklandıktan sonra çeşitli yönleri ile pratik uygulanışları da ayrıca verilecektir.

11.2.1. $F_{\max}$ Hipotez Testi

Bu test yöntemi çoğu uygulamalar için *HARTLEY* 'in $F_{\max}$ testi olarak da isimlendirilmektedir. $F_{\max}$ hipotez testinde ana ilke olarak n elemanlı veri kümelerinden elde edilmiş, ancak serbestlik dereceleri eşit sayıda olan varyansların homojenliği test edilmektedir. Bu amaçla, her biri normal dağılıma sahip verilerden elde edilmiş m sayıda varyansın aynı kuramsal değere sahip olup olmadıkları varsayımına göre kurulacak bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = ...= E\{s_m^2\} = \sigma_0^2$$
$$H_s : E\{s_k^2\} \neq \sigma_0^2 \quad (En\,az\ bir\ \ k\ \text{değeğe}\, için)$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde düzenlenmiş bir sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü, m sayıdaki varyans değerlerinden en büyüğünün ek küçük değerli olana bölünmesi sonucunda

$$F_{\max} = \frac{\max(s_i^2)}{\min(s_i^2)}$$

olarak elde edilir. Böyle bir sıfır hipotezinin irdelenmesi amacıyla, bu test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri, α yanılma olasılığı ve m varyansların sayısı, $f = n-1$ her bir varyansın serbestlik derecesi olmak üzere Tablo 41'da verilmiş olan $F_{\max}$ *dağılım* tablosundan $F_{f,m,\alpha}$ olarak alınır.

Tablo 41 : $\alpha = 0{,}05$ Yanılma olasılığına göre $F_{\max}$ tablo değerleri

f serbestlik derecesi	m varyansların sayısı										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	*39,0*	*87,5*	*142*	*202*	*266*	*333*	*403*	*475*	*550*	*626*	*704*
3	*15,4*	*27,8*	*39,2*	*50,7*	*62,0*	*72,9*	*83,5*	*93,9*	*104*	*114*	*124*
4	*9,6*	*15,5*	*20,6*	*25,2*	*29,5*	*33,6*	*37,5*	*41,1*	*44,6*	*48,0*	*51,4*
5	*7,2*	*10,8*	*13,7*	*16,3*	*18,7*	*20,8*	*22,9*	*24,7*	*26,5*	*28,2*	*29,9*
6	*5,82*	*8,38*	*10,4*	*12,1*	*13,7*	*15,0*	*16,3*	*17,5*	*18,6*	*19,7*	*20,7*
7	*4,99*	*6,94*	*8,44*	*9,70*	*10,8*	*11,8*	*12,7*	*13,5*	*14,3*	*15,1*	*15,8*
8	*4,43*	*6,00*	*7,18*	*8,12*	*9,03*	*9,78*	*10,5*	*11,1*	*11,7*	*12,2*	*12,7*
9	*4,03*	*5,34*	*6,31*	*7,11*	*7,80*	*8,41*	*8,95*	*9,45*	*9,91*	*10,3*	*10,7*
10	*3,72*	*4,85*	*5,67*	*6,34*	*6,92*	*7,42*	*7,87*	*8,28*	*8,66*	*9,01*	*9,34*
12	*3,28*	*4,16*	*4,75*	*5,30*	*5,72*	*6,09*	*6,42*	*6,72*	*7,00*	*7,25*	*7,43*
15	*2,86*	*3,54*	*4,01*	*4,37*	*4,68*	*4,95*	*5,19*	*5,40*	*5,59*	*5,77*	*5,95*
20	*2,46*	*2,95*	*3,29*	*3,54*	*3,76*	*3,94*	*4,10*	*4,24*	*4,37*	*4,49*	*4,59*
30	*2,07*	*2,40*	*2,61*	*2,78*	*2,91*	*3,02*	*3,12*	*3,21*	*3,29*	*3,36*	*3,39*
60	*1,67*	*1,85*	*1,96*	*2,04*	*2,11*	*2,17*	*2,22*	*2,26*	*2,30*	*2,33*	*2,36*
?	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*	*1,00*

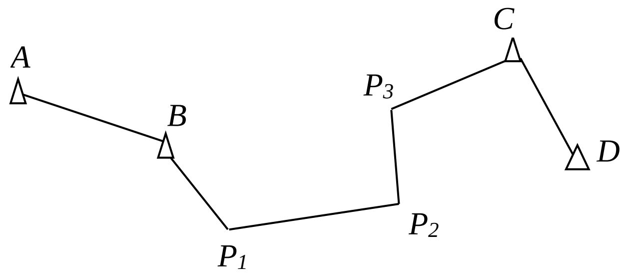
Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, $F_{\max} \le F_{f,m,\alpha}$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesinin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = n-1$ serbestlik derecelerine göre eşit varyanslı yanı homojen oldukları kabul edilebilir.

Tersi durumda, eğer $F_{\max} > F_{f,m,\alpha}$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesinin $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ve $f = n-1$ serbestlik derecelerine göre eşit varyanslı yanı homojen oldukları kabul edilemez. Homojen olmadıkları söylenebilir.

Örnek: Şekilde görüldüğü gibi bir dayalı poligon geçkisin de alet kurulan *B*, P_1, P_2, P_3 *ve C*



Şekil 32: Dayalı poligon geçkisi

noktalardaki yatay doğrultular *n=4* tam dizi*(silsile)* olarak ölçülmüştür. Her bir noktadaki gözlemler için yapılan istasyon*(durak noktası)* dengelemesi sonucunda doğrultu gözlemlerinin soncul*(a posteriori)* karesel ortalama hataları

Tablo 42: Her noktada hesaplanmış karesel ortalama hatalar

Nok. No	*B*	P_1	P_2	P_3	*C*
s_i *(cc)*	± *2,51*	*3,02*	*2,16*	*2,13*	*3,51*

olarak hesaplanmıştır (Tablo 42). Daha sonra yapılacak bir ana dengeleme hesabı için bu doğrultuların ağırlıklarının α =0,05 yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacağının $F_{\max}$ hipotez testine göre istatistik olarak irdelenmesi istenmektedir.

Çözüm: Her noktada istasyon *(Durak noktası)* dengelemesi neticesinde elde edilmiş varyans değerlerinin α =0,05 yanılma olasılığına göre homojen olup olmadıkları ya da eşit alınıp alınamayacaklarını irdeleyebilmek için burada bir $F_{\max}$ testi uygulanabilir. Bu amaçla veriler arasında kurulacak sıfır hipotez testi

$$H_0 : E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\} = E\{s_3^2\} = E\{s_4^2\} = E\{s_5^2\} = \sigma_0^2$$
$$H_s : E\{s_k^2\} \neq \sigma_0^2 \qquad (En\,az\;\; bir \;\; k = 1, 2, 3, 4, 5 \;\; için)$$

şeklinde yazılır. Bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü, $m = 5$ sayıdaki varyans değerlerinin hesaplanmasında kullanılan doğrultu gözlemi sayısı *(4x2=8)* veya serbestlik dereceleri

$$f = (s-1)(n-1) = (2-1)(4-1) = 3$$

eşit olduğundan en büyüğünün ek küçük değerli olana bölünmesi sonucundan

$$F_{\max} = \frac{\max(s_i^2)}{\min(s_i^2)} = \frac{3{,}51^2}{2{,}13^2} = 2{,}716$$

olarak hesaplanır.

Bu test değerine karşılık gelen kuramsal sınır değeri, $F_{\max}$ tablosundan $m = 5$, $f = ns - 1 = 8 - 1 = 7$ serbestlik derecesi değerlerine göre $F_{f,m,\alpha} = F_{7,5,0,05} = 9{,}70$ olarak ilgili F-dağılım tablosundan elde edilir.

Sonuçta; bu iki değerin karşılaştırılmasından, $F_{\max} < F_{f,m,\alpha}$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Bu iki veri kümesinin $m = 5$ ve $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile $f = ns - 1 = 7$ serbestlik derecelerine göre eşit varyanslı yanı homojen oldukları söylenebilir.

Burada $F_{\max} > F_{f,m,\alpha}$ olması durumunda, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Buna ilişkin bir yorumda, birinci yorumun tersi yönde: bu iki veri kümesinin $m = 5$ ve $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile $f = ns - 1 = 7$ serbestlik derecelerine göre eşit varyanslı yanı homojen oldukları söylenemez denir.

11.2.2. $G_{\max}$ Hipotez Testi

$G_{\max}$ hipotez testi yönteminde, sadece gruplardaki elemen sayıları ya da irdelenmesi istenen rastgele değişkenlerin serbestlik dereceleri eşit ve aynı kuramsal parametre değerine sahip farklı deneysel standart sapmaların belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacakları irdelenmektedir. Hatırlanacağı gibi, bu test yöntemi literatürde çoğu zaman *Cochran testi* olarak da adlandırılmaktadır.

Bu amaçla, $G_{\max}$ hipotez testi yönteminin pratik uygulanışı ile ilgili, n ölçü sayısı ya da $f = n - u$ serbestlik dereceleri eşit gözlemlerin s_i standart sapma değerleri,

Tablo 43: Farklı kaynaklı standart sapmalar ve eşit serbestlik dereceleri

Standart sapma değerleri	s_1	s_2	....	s_m
Serbestlik derecesi	f	f	....	f

olarak verilmiş olsun (Tablo 43).

Tablo 43 'de her biriyle ilgili deneysel standart sapma değerleri verilmiş olan ve aynı zamanda eşit elemanlı gruplardan ya da serbestlik dereceli s_1 , $s_2, \ldots, s_m$ standart sapma değerlerinin kuramsal değerlerinin eşit olup olması,

$$E\{s_1\} = \sigma_1 \,, \quad E\{s_2\} = \sigma_2 \ldots\ldots E\{s_m\} = \sigma_m$$

prensibine dayalı bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots = \sigma_m = \sigma_0$$
$$H_s : \sigma_k \neq \sigma_0 \qquad (En\,az\ \ bir\ \ k\ \ \text{değeğe}\, için)$$

şeklinde kurulabilir.

Daha sonra böyle bir hipotezin öngörülen belli bir istatistik anlamlılık seviyesine göre irdelenebilmesi için ilgili test büyüklüğü,

$$G_{\max} = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots + s_m^2}$$

şeklinde belirlenir.

Bu şekilde hesaplanmış olan test büyüklüğü, öngörülen bir $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesi ve *m (dizi ya da deneysel standart sapma sayısı), f* serbestlik derecesine göre $G_{\max}$ *-dağılım* tablosundan alınan bir $G_{m,f,S}$ kritik ya da sınır değeri ile karşılaştırılır (Tablo 44).

Tablo 44: S=%95 ihtimalle $G_{\max}$ dağılım tablosu

Tablo 24 : S=%95 ihtimalle $G_{\max}$ dağılımı dağılım tablosu

m \ f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8772	0.8534	0.8332	0.8159	0.8010	0.7880	0.7341	0.6602	0.5813	0.5000
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6157	0.6025	0.5466	0.4748	0.4031	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.4366	0.3720	0.3093	0.2500
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5441	0.5065	0.4783	0.4584	0.4387	0.4241	0.4118	0.3645	0.3066	0.2513	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.3135	0.2612	0.2119	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4307	0.3974	0.3726	0.3533	0.3384	0.3259	0.3154	0.2756	0.2278	0.1833	0.1429
8	0.6790	0.5157	0.4377	0.3910	0.5595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.2462	0.2022	0.1616	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.2226	0.1820	0.1446	0.1111
10	0.6020	0.4450	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.4541	0.2439	0.2353	0.2032	0.1655	0.1308	0.1000
15	0.4709	0.3346	0.2758	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.1429	0.1144	0.0889	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.1108	0.0879	0.0675	0.0500
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0771	0.0604	0.0457	0.0333
60	0.1737	0.1131	0.0895	0.0765	0.0682	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0411	0.0316	0.0234	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0495	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0279	0.0266	0.0218	0.0165	0.0120	0.0083
∞	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Böyle bir karşılaştırma sonucunda, test büyüklüğü tablo değerinden $G_{\max} \leq G_{m,f,S}$ küçük olursa, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine ve f serbestlik derecesine göre bu standart sapma değerleri eşit alınabilir.

Eğer her iki değerin karşılaştırılması sonucunda tersi bir durum olan, $G_{\max} > G_{m,f,S}$ sonucuna rastlanmış olunursa, o zaman H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

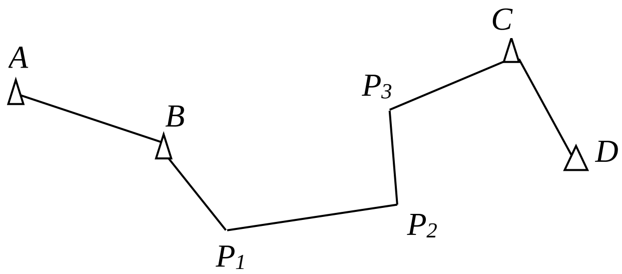
Yorum: $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine ve f serbestlik derecesine göre bu standart sapma değerleri eşit alınamaz denir.

Örnek: Şekilde görüldüğü gibi, bir dayalı poligon geçkisinde alet kurulan *B*, P_1, P_2, P_3 *ve* *C* noktalardaki yatay doğrultular *n=4* tam dizi *(silsile)* olarak gözlenmiştir. Her noktada yapılan istasyon *(durak noktası)* dengelemesi sonucunda doğrultu gözlemlerinin karesel ortalama hataları

Tablo 45: Her bir noktadaki ortalama hatalar

Nok. No	*B*	P_1	P_2	P_3	*C*
s_i *(cc)*	± *2.51*	*3.02*	*2.16*	*2.13*	*3.51*

olarak hesaplanmıştır (Tablo 45).



Şekil 33: Dayalı poligon geçkisi

Bütün doğrultu gözlemlerinin katılımı ile yapılacak bir ana dengeleme hesabında kesin doğrultu gözlemlerinin ağırlıklarının α =0,05 yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacağını $G_{\max}$ hipotez testine göre istatistik olarak irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Burada konu ikiden daha fazla standart sapmanın istatistik olarak mukayese edilmesi problemidir. Böyle bir problemin , $G_{\max}$ hipotez testine göre irdelenebilmesi için, her birine ilişkin f serbestlik dereceleri eşit olması gerekir. Bu amaçla, verilmiş olan deneysel standart sapma değerlerinin hesaplanmasında,

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}$$

formülü kullanılmış olduğundan her biriyle ilgili serbestlik derecelerinin hesaplanmasında, $f=(n-1)(s-1)$ bağıntısı kullanılmış ve sonuçta ilgili serbestlik dereceleri eşit ve $f=(n-1)(s-1)=(4-1)(2-1)=3$ olarak bulunmuştur. Buna göre; yapılacak bir $G_{\max}$ hipotez testi çözümünde ilk işlem adımı olarak,

$$E\{s_1^2\}=\sigma_1^2\ ,\ \ E\{s_2^2\}=\sigma_2^2\ \ldots\ldots.\ E\{s_5^2\}=\sigma_5^2$$

umut değerlerinden faydalanılarak

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots\ldots.= \sigma_5 = \sigma_0$$
$$H_s : \sigma_k \neq \sigma_0 \qquad (En\ az\ bir\ \ k\ \ için)$$

şeklinde bir hipotez kurulur.

Sonra bu hipotezle ilgili test büyüklüğünün hesaplanabilmesi için, her noktadaki; standart sapma değerlerinde en büyüğü $s_{\max} = 3{,}51$ seçilerek, test büyüklüğü,

$$G_{\max} = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + ...+ s_m^2} = \frac{3{,}51^2}{2{,}51^2 + 3{,}02^2 + 2{,}16^2 + 2{,}13^2 + 3{,}51^2} = \frac{12{,}3201}{36{,}9431} = 0{,}333$$

olarak hesaplanmıştır.

Daha sonra, bu test büyüklüğüne karşılık gelen sınır ya da $G_{\max}$ dağılım tablo değeri S=%95 ihtimalle m deneysel standart sapma sayısı ve f serbestlik derecelerine göre önceden hazırlanmış, Tablo 44 ‘daki $G_{\max}$ dağılım tablosundan $G_{m,f,S} = G_{5,3,0,95} = 0{,}5981$ olarak elde edilmektedir.

Sonuçta, bu iki değerin karşılaştırılmasından $G_{\max} < G_{m,f,S}$ olduğu için H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum, $S = 1 - \alpha = 0{,}95$ anlamlılık seviyesine ve *f=3* serbestlik derecesine göre bu standart sapma değerleri eşit alınabilir.

11.2.3. Bartlett Hipotez Testi

Bartlett hipotez testi yönteminde, bu özel durumlar yanında daha genel bir durum olan, farklı bölgelerde yapılmış gözlemlerden elde edilmiş ancak her biri normal dağılıma sahip verilerden türetilmiş m sayıda veya farklı serbestlik derecesi değerlerine sahip,

Tablo 46: Farklı kaynaklı standart sapmaları ve serbestlik dereceleri

Deneysel standart sapma değerleri	s_1	s_2	....	s_m
Her bir deneysel standart sapmanın serbestlik derecesi	f_1	f_2	....	f_m

m adet deneysel standart sapma değerlerinin, belli bir $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine göre eşit alınıp alınamayacağı irdelenebilmektedir(Tablo 46). Kuramsal anlamda bu gibi özellikleri olan böyle bir hipotez testi işlemi için, her bir deneysel standart sapma değerlerinin veya bunların karesi şeklinde tanımlanabilen varyanslarının umut değerlerine ilişkin,

$$E\{s_1^2\} = \sigma_1^2, \quad E\{s_2^2\} = \sigma_2^2 \,.......\, E\{s_m^2\} = \sigma_m^2$$

biçiminde tanımlı olan varyans değerlerinin, belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre eşdeğer alınıp, alınamayacaklarının istatistik olarak irdelenebilmesi için, hipotez testinin ilk işlem adımı olarak bunların arasında,

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2 = ...= \sigma_m = \sigma_0$$
$$H_s : \sigma_k \neq \sigma_0$$

biçiminde, seçenek hipotezinde en az bir k değeri için farklı olacak şeklinde bir hipotez kurulur. İkinci işlem adımında, bu hipotezle ilişkin bir test büyüklüğünü hesaplayabilmek için ara işlemler olarak, her birine karşılık gelen serbestlik derecelerinin toplamı, $[f] = f_0 = f_1 + f_2 + ...+ f_m$ biçiminde elde edildikten sonra, deneysel varyansların ağırlıklı ortalaması,

$$s_0^2 = \frac{[fs^2]}{[f]} = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + ...+ f_m s_m^2}{f_0}$$

olarak bulunur. Daha sonra, üçüncü işlem adımı olarak, bir c test sabiti,

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left\{ \left[\frac{1}{f} \right] - \frac{1}{f_0} \right\}$$

bağıntısından hesaplanarak, standart dağılımlı rastgele değişken ya da test büyüklüğü,

$$B = \frac{1}{c} \left\{ f_0 \ Ln(s_0^2) - \left[f \ Ln(s^2) \right] \right\}$$

formülünden hesaplanır.

Burada, H_0 sıfır hipotezinin geçerli olduğu durumlarda B test büyüklüğü χ^2 -dağılımında olmaktadır. Buna göre; sıfır hipotezine ilişkin hesaplanmış test büyüklüğü değerinin karşılaştırılması amacıyla burada kullanılabilecek bir test sınır ya da kritik değerleri için, önceden seçilmiş $\alpha = 1 - S$ yanılma ve *m-1* serbestlik derecesine göre χ^2 -dağılım tablosundan $q = \chi^2_{m-1,1-\alpha}$ olarak alınabilir.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırmasından eğer $B \leq q$ ise; H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum, bu deneysel standart sapmalar, α yanılma olasılığı ve *m-1* serbestlik derecesine göre eşit alınabilirler.

Tersi durumda; $B > q$ olması halinde ise; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu yöndeki bir yorum da: bu deneysel standart sapmalar, α yanılma olasılığı ve *m-1* serbestlik derecesine göre eşit alınamazlar denir.

***Not 1*:** Ancak, burada tekrar söylemek gerekirse, uygulamada aynı amaca hizmet eden *Bartlett hipotez testi* ile ilgili test büyüklüğünün hesaplanmasında literatürde yer aldığı şekliyle, Tablo 47'den de görüldüğü gibi daha başka formüllerin mevcut olduğu ve zamanla ilgili problemlerde kullanıldığı söylenmektedir.

Tablo 47 Barlett test büyüklüğünün hesaplanması ile ilgili diğer formüller

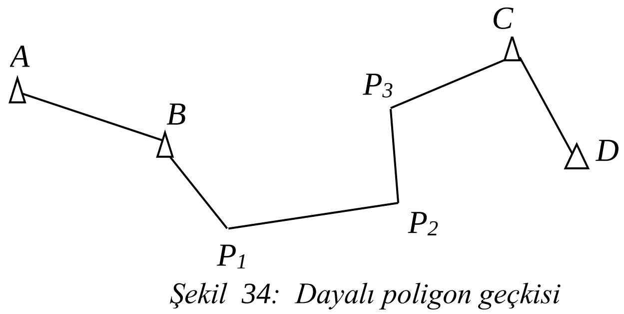
Barlett hipotez testi test büyüklüğünün hesaplanması ile ilgili formül:1	*Barlett* hipotez testi test büyüklüğünün hesaplanması ile daha pratik diğer bir formül: 2	α yanılma olasılığına göre kuramsal tablo değeri
$B = \dfrac{-\sum_{i=1}^{m} f_i \ln \dfrac{s_i^2}{s_0^2}}{(m-1) + \dfrac{1}{3}(\sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{f_i} - \dfrac{1}{f_0})}$	$B = \dfrac{2.303(f_0 \log s_0^2 - \sum_{i=1}^{m} f_i \log s_i^2)}{(m-1) + \dfrac{1}{3}(\sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{f_i} - \dfrac{1}{f_0})}$	$F_{m-1,\infty} = \chi^2_{m-1}$
Barlett hipotez testi test büyüklüğünün hesaplanması ile ilgili formül:3	*Barlett* hipotez testi test büyüklüğünün hesaplanması ile ilgili formül:4	Formül 4 için sınır değeri $F_{f_1,f_2,\alpha}$
$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$; $s_0^2 = \dfrac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)s_i^2$ $B = \dfrac{(N-m)Lns_0^2 - \sum_{i=1}^{m}(n_i-1)Lns_i^2}{1 + \dfrac{1}{3(m-1)}(\sum_{i=1}^{m}(\dfrac{1}{n_i-1}) - \dfrac{1}{N-m})}$	$N = \sum_{i=1}^{m} n_i$; $s_0^2 = \dfrac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{m}(n_i-1)s_i^2$; $f_2 = \dfrac{m+1}{A^2}$; $f_1 = m-1$; $A = \dfrac{1}{3(m-1)}(\sum_{i=1}^{m}(\dfrac{1}{n_i-1}) - \dfrac{1}{N-m})$; $B = \dfrac{f_2 M}{f_1(b-M)}$ $M = (N-m)Lns_0^2 - \sum_{i=1}^{m}(n_i-1)Lns_i^2$; $b = f_2(1-A+2f_2^{-1})^{-1}$	
Burada: s_i^2 : varyans değerleri, n_i : grupların eleman sayıları, m : grup sayısını göstermektedir. *Not:* $f_i \leq 2$ *için bu testin zayıf olmaktadır.*		

Ancak, Tablo 47'de *Barlett* testiyle ilgili test büyüklüğünün hesaplanmasında kullanılmak için verilmiş olan diğer formüllerden de görüleceği gibi; *formül:1, formül:2, formül:3 ve formül:4,* bağıntıları az da olsa şekil bakımından birbirinden bazı farklılıklar göstermektedir. Aralarında bu gibi farklılıklar olsa bile, her birinin uygulanışından benzer sonuç ve yorumlar çıkarılabileceğinden bazı uygulamalar için çeşitli pratik anlamlar taşıyacakları söylenebilir.

Uyarılar: *Burada, karşılaştırılan ölçü gruplarının deneysel standart sapmaları hesaplanırken faydalanılan serbestlik derecelerinin her biri* $f_i \geq 10$ *olmalıdır. Burada,* $i = 1, 2, ..., m$ *grup sayısını göstermektedir. Ayrıca, BARTLETT-testi normal dağılımdan sarpmalara karşı çok duyarlı olmaktadır. Bu test normal dağılımda olmayan verilere uygulandığında elde edilen sonuçlara güvenilmemektedir. Bu nedenle, ölçü gruplarından kuşku duyulanlarına Bartlett-testinin uygulanmasından önce normal dağılım testlerinin uygulanarak, bunların normal dağılımda olup olmadıklarının irdelenmesi gerekir.*

Not 2: Buradan da görüleceği gibi *Bartlett testi*; normaliteden olan sapmalara oldukça duyarlı bir test olduğu söylenebilir. Bu nedenle, *Bartlett* testinin uygulanmasında veriler daima normal dağılımda olması gerekir. Bu özelliğinden dolayı de, parametrik hipotez testi grubundan sayılmaktadır. Ancak, bazı uygulamalar için bunun yerine, burada sözü edilmiş özelliklerin geçersiz olduğu veri kümelerinde, belli bir olasılık seviyesine göre ikiden daha fazla sayıda varyansların eşit alınıp alınamayacağının istatistik irdelenmesinde kullanılabilen daha başka yöntemlerin varlığı söz konusu olur. Bu amaçla geliştirilmiş bir diğer test yöntemi *Levene* testi olmaktadır. Bu test yönteminde, veriler normal dağılımda olup da az sayı olabileceği gibi normal dağılımda olmayıp da başka bir dağılımda olursa yine daha iyi ve etkin sonuçlar verdiğinden kullanılması ilgili kaynaklarda önerilmektedir. Yine aynı kaynaklarda, ne zaman veriler normal dağılımda olur o zaman *Bartlett testi* oldukça iyi ve etkin sonuçlar vereceği ayrıca vurgulanmaktadır. Bu haliyle *Levene* testi *non*-parametrik bir hipotez testi olduğu rahatlıkla söylenebilir.

Örnek: Şekildeki dayalı poligon geçkisinde alet kurulan B, P_1, P_2, P_3 *ve* C



Şekil 34: Dayalı poligon geçkisi

noktalardaki doğrultular *n=4* tam dizi *(silsile)* olarak ölçülmüştür. Yapılan istasyon *(durak noktası)* dengelemesi sonucunda her noktadaki doğrultu gözlemlerinin karesel ortalama hataları,

Tablo 48: Her bir noktadaki ortalama hatalar

Nok. No	*B*	*P_1*	*P_2*	*P_3*	*C*
$m_0(cc)$	$\pm$ *2,51*	*3,02*	*2,16*	*2,13*	*3,51*

olarak hesaplanmaktadır (Tablo 48). Burada, çözümü gerçekleştirilecek olan bir dengeleme hesabında bu doğrultuların ağırlıklarının α =0.05 yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacağını istatistik olarak irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Burada konu ikiden daha fazla standart sapmanın istatistik olarak mukayese edilmesi problemidir. Böyle bir problem, *Bartlett-testi* ile irdelenebilir. Bu amaçla, ilk işlem adımı olarak,

$$E\{s_1^2\}=\sigma_1^2\,,\quad E\{s_2^2\}=\sigma_2^2\ \ldots\ldots\ E\{s_5^2\}=\sigma_5^2$$

olmak üzere,

$$H_0:\sigma_1=\sigma_2=........=\sigma_5=\sigma_0$$
$$H_s:\sigma_k\neq\sigma_0 \qquad (En\,az\ \ bir\ \ \ k\ \ için)$$

bir hipotez kurulur. Sonra bu hipotezle ilgili test büyüklüğünün hesaplanabilmesi için, her noktada yapılan gözlemlerden elde edilen birim ölçünün ortalama hatası,

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)(s-1)}}$$

formülünün paydasındaki ifade her bir deneysel standart sapma değerinin serbestlik derecesini gösterdiğinden, buna göre her bir noktadaki standart sapma değerleri için ilgili serbestlik dereceleri $f=(n-1)(s-1)$ bağıntısından,

Tablo 49: Her noktadaki serbestlik dereceleri

Nok. No	*B*	*P_1*	*P_2*	*P_3*	*C*
$m_0(cc)$	$\pm$ *2,51*	*3,02*	*2,16*	*2,13*	*3,51*
f_i	*3*	*3*	*3*	*3*	*3*

olarak hesaplanır(Tablo 49). Daha sonra, serbestlik derecelerinin toplamı,

$m = 5$ olduğundan,

$$f_0 = f_1 + f_2 + ...+ f_5 = [f] = 15$$

ve deneysel varyansların ağırlıklı ortalaması da,

$$s_0^2 = \frac{[fs^2]}{[f]} = \frac{f_1 s_1^2 + f_2 s_2^2 + ...+ f_5 s_5^2}{f_0} = \frac{110,8293}{15} = 7,3886(cc^2)$$

olarak bulunduktan sonra, c sabiti,

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left\{\left[\frac{1}{f}\right] - \frac{1}{f_0}\right\} = 1 + \frac{1}{3(5-1)}\left\{\frac{5}{3} - \frac{1}{15}\right\} = 1,0778$$

olarak elde edilir. Ve daha sonra ilgili test büyüklüğü,

$$B = \frac{1}{c}\left\{f_0 \ Ln(s_0^2) - \left[f \ Ln(s^2)\right]\right\} = \frac{1}{1,0778}\{15 \ Ln(7,3881) - 28,8443\} = 1,071$$

şeklinde hesaplanır.

Bu test büyüklüğünün tablo değerleri ile karşılaştırmasında kullanılacak olan sınır değerleri, $\alpha = 0.05$ yanılma ve *f=m-1=5-1=4* serbestlik derecesine göre χ^2 -dağılım tablosundan $q = \chi^2_{4,0,95} = 9,488$ değeri alınır.

Sonuçta: $B = 1.071 < q = \chi^2_{4,0,95} = 9,488$ olduğundan, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Burada verilmiş olan deneysel standart sapmaları, $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre eşit alınabilirler. Diğer bir ifade ile her noktada 4 tam dizi yapılmış olan doğrultu gözlemleri eşit duyarlıkta kabul edilebilirler.

11.2.4. Levene Hipotez Testi

Levene testi, Bartlett testinde olduğu gibi, *m* sayıda deneysel varyansın aynı kuramsal varyansa sahip olduklarının ya da eşdeğer oldukları varsayımının test edilmesinde kullanılır. Ancak, bu test yönteminin uygulanmasında verilerin normal dağılımda olmaları varsayımı bir ön koşul değildir. Herhangi bir dağılımda olabilirler. Bu haliyle, *Levene testi,* aynı kuramsal varyans değerine sahip deneysel varyanslar için genel anlamda kullanılabilen bir homojenlik testi olmaktadır. Bu nedenle, çoğu zaman en genel anlamlı bir homojenlik test olarak da isimlendirilebilir. Bu sebepledir ki, çoğu kaynaklarda, *Levene* testi *Bartlett* testine alternatif bir test olduğu söylenir. Çünkü, *Levene testi; Bartlett testine* nazaran normal durumdan olan sarpmalara daha az duyarlı bir yöntem olmaktadır. Ancak, eğer mevcut verilerin bir normal dağılımdan geldikleri hakkında kesin ya da yaklaşık bir bilgiler var ise, o zaman *Bartlett testi, Levene* testinden daha iyi bir performans sergilediği söylenebilir.

Burada söylenenlerden hareketle sonuçta, veri sayısı $n \geq 30$ ve normal dağılımda olmaları durumunda *Bartlett* testinin *Levene* testine oranla daha etkin bir test yöntemi olduğu söylenebilir. Tersi durumdaki haller için *Levene* testinin daha etkin ve geçerli olduğu söylenir

Bu duruma göre; *Levene* testi ile m sayıda varyans veya standart sarpma değerlerinin, ön görülen bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre istatistik olarak eşit alınıp alınamayacaklarının irdelenebilmesi için kurulması istenen sıfır hipotezi, *Bartlett* testinde yapılanlara benzer şekilde,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_m^2 = \sigma^2$$
$$H_s : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \quad ; \quad (en\ az\ bir \quad (i, j\ )\ çifti\ için)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, n sayıda bir deneysel y veri kümesi için, bu veri kümesi m sayıda alt gruba ayrılarak, n_i her bir gruptaki eleman sayısını göstermek üzere, bu şekilde kurulmuş bir sıfır hipotezinin için test büyüklüğü;

$$w = \frac{(n-m)\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{w}_i - \overline{w})^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(w_{ij} - \overline{w}_j)^2}$$

bağıntısından hesaplanır. Bu bağıntıda yer alan parametreler,

- n : *Toplam veri sayısı,*
- m : *Alt grup sayısını,*
- n_i : *i.Gruptaki veri sayısını,*
- $w_{ij} = \left| y_{ij} - \overline{y}_i \right|$,
- $\overline{w}_i$: w_{ij} *'ler için i. grup ortalamasını,*

- $\overline{w}$ *gösterimi de:* w_{ij} *'ler için genel ortalamayı*

göstermektedir.

Ancak, burada bazı uygulamalar için söylemek gerekirse; $w_{ij} = \left| y_{ij} - \overline{y}_i \right|$ bağıntısından w_{ij} değerlerini hesaplamada uygulamada üç farklı durum söz konusu olmaktadır. Bunlar her biri için, $\overline{y}_i$ değerinin *i. alt* gruptan elde edilmesine bağlı olarak,

- $\overline{y}_i$: i. alt grubun *ortalama* değeri,
- $\tilde{y}_i$: i. alt grubun *medyan* değeri,
- $\overline{\overline{y}}_i$: i. alt grubun *%10* riskle elde edilmiş *trimmed ortalama* değeri ,

alınarak işlemlerin yapılması şeklinde özetlenebilir.

Burada, söylemek gerekirse; w_{ij} *değerlerinin böyle üç farklı ortalama değerine göre tanımlanmış değerlerinin kullanılması, aynı zamanda Levene testinin gücünü ve robustluğunu da açıklamaktadır. Levene testinin robustluğunda, aslında değişkenler eşit ve dikkati çeken bazı veriler normal dağılımda olmadığı zaman, eşit olmayan varyansları hatalı bir biçimde belirlememedeki testin meziyetlerinden söz edilebilir. Buna karşılık bir testin gücünde ise; aslında varyanslar eşit değil, ancak eşit olmayan bu varyansları seçmedeki kabiliyeti söz konusu olmaktadır.*

Levene, orijinal çalışmalarında sadece ortalama değeri kullanarak çözüme ulaşmıştır. Ancak, daha sonraki yıllarda yapılan bazı çalışmalardan, konu medyan ve trimmed ortalamaların kullanılması ile de daha da genişletilmiştir. Yapılan incelemelerin neticesinde; veriler cauchy dağılımında olduğu zaman trimmed ortalamanın, χ^2_4 *(i.e. skewed) dağılımda olduğu zamanda medyanın kullanılması performansı en iyi bir çözüm olmaktadır. Buna rağmen, simetrik ve aşırı uç değerleri atılarak iki taraftan ortalanmış dağılımlar için ortalamanın kullanılmış olması, en iyi gücü sergilemektedir.*

Deneysel verilerden hesaplanan w test büyüklüğüne karşılık gelen kuramsal dağılım tablo değeri, ön görülen $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve $f_1 = (m-1)$ payın, $f_2 = (n-m)$ paydanın serbestlik derecesi değerlerine göre *F-Fisher* dağılım tablosundan alınır.

Eğer, $w < F_{f_1, f_2, \alpha}$ ise; H_0: sıfır hipotezi $S = 1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: bu varyansların $S = 1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre eşit ya da homojen oldukları söylenebilir.

Tersi durumda, eğer $w > F_{f_1, f_2, \alpha}$ ise; H_0: sıfır hipotezi $S = 1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu durumda da yorum: bu varyansların $S = 1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre eşit ya da homojen olmadıkları söylenebilir.

Örnek: Bir nirengi ağının farklı noktalarında farklı sayıda doğrultular eşit sayı tam dizi*(silsile)* yöntemiyle gözlenerek, her biriyle ilgili yapılan istasyon dengelemesi sonucunda karesel ortalama hataları hesaplanarak

$$f = (n-1)(s-1)$$

şeklinde elde edilmiş serbestlik dereceleri ile birlikte

Tablo 49: Her noktadaki ortalama hatalar ve serbestlik dereceleri

i Nokta No	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
s_i	*1,9*	*2,2*	*2,1*	*2,3*	*2,1*	*2,0*	*2,3*	*2,4*	*2,3*
f_i	*33*	*33*	*33*	*33*	*33*	*33*	*22*	*22*	*22*
i Nokta No	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
s_i	*2,2*	*2,1*	*2,2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*	*2,0*	*2,1*	*2,2*
f_i	*22*	*28*	*28*	*28*	*28*	*28*	*24*	*24*	*24*

olarak verilmiştir. Bu değerlerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile eşit alınıp alınamayacakları Levene testine göre istatistik olarak irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Bu veriler, Levene testine göre istatistik olarak irdeleyebilmek için, serbestlik derecelerine göre; şeklinde gruplandırılmıştır(Tablo 53).

Burada, toplam veri sayısı $n = 18$ ve grup sayısı $m = 4$ olmaktadır. Tablo 50'deki değerlere göre sıfır hipotezi ile ilgili w test büyüklüğü,

$$w = \frac{(n-m)\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{w}_i - \overline{w})^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(w_{ij} - \overline{w}_j)^2}$$

bağıntısından faydalanılarak Tablo 50 de yapılan ara işlemlerin sonucundan,

Tablo 50: Gruplandırmalar ve hesaplamalar

j : grup sayısı	1.Grup		2. Grup		3. Grup		4. Grup	
	y_{ij}	$\left\|y_{ij} - \overline{y}_i\right\|$	y_{ij}	$\left\|y_{ij} - \overline{y}_i\right\|$	y_{ij}	$\left\|y_{ij} - \overline{y}_i\right\|$	y_{ij}	$\left\|y_{ij} - \overline{y}_i\right\|$
	1,9	0,2	2,3	0,0	2,1	0,2	2,0	0,1
	2,2	0,1	2,4	0,1	2,2	0,1	2,1	0,0
	2,1	0,0	2,3	0,0	2,3	0,0	2,2	0,1
	2,3	0,2	2,2	0,1	2,4	0,1		
	2,1	0,0			2,5	0,2		
	2,0	0,1						
Toplam (w_i) = 1,6		0,6		0,2		0,6		0,2
Ortalama $(\overline{w}_i)$ = 0,089		0,1		0,05		0,12		0,067

$$w = \frac{(18-4)0{,}08467}{(4-1)0{,}01312} = 0{,}72$$

olarak hesaplanır.

Bu test büyüklüğüne karşılık gelen kuramsal dağılım tablo ya da sınır değeri; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile ilgili *F-Fisher* dağılım tablosundan $q = F_{f_1, f_2, \alpha} = F_{3,14,0,05} = 3{,}35$ olarak alınır.

Farklı yollardan elde edilmiş olan bu test büyüklüğü ile buna karşılık gelen tablo değerlerinin karşılaştırılmasından; $w = 0{,}72 < q = 3{,}35$ olduğu için, H_0: sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir. Bunun neticesinde de aşağıdaki yorum yapılabilir.

Yorum: Bu varyansların $S = 0{,}95$ anlamlılık seviyesine göre eşit ya da homojen oldukları söylenebilir.

11.2.5. Parametrik Hipotez Testlerinin Genel Bir Özeti

Matematik-istatistiğin temel konularından biri olan tahmin teorisi; evrensel küme parametrelerinin bir tahminini veya bunlarla ilgili bazı varsayımlara dayalı kurulan hipotezlerin istatistik olarak irdelenmesi konuları ile ilgilenmektedir. Bu amaçla kullanılmakta olan bütün hipotez testleri, sergiledikleri nitel ve nicel özellikleri gereği; *parametrik* ve *non-parametrik* hipotez testleri olmak üzere, iki grupta tele alınabilir. Gerekli varsayımların geçerli olmadığı durumlarda, *parametrik* test teknikleri büyük ölçüde güvenilirliklerini kaybederler.

Böyle durumlarda, *non-parametrik* teknikler devreye girer ve daha güvenilir olurlar. Bilindiği gibi, bir olayla ilgili evrensel küme parametreleri tesadüfî seçimle alınacak sonlu sayıdaki örnekleme veri kümesi istatistikleri ile tahmin edilirler. Böyle bir kümeyle ilgili örnekleme veri dağılımı bilindiği zaman, herhangi bir tahminin gerçek parametreye olan yakınlığı ya da onu temsil etmedeki başarı şansı belirli bir olasılıkla belirlenmiş ve neticede tahmin değeri ile gerçek parametre değeri arasındaki farklılık ihtimal dahilinde ölçülmüş olur. Böyle bir kestirimde ana amaç, evrensel kümeye ilişkin gerçek parametre değeri ile sonlu sayıdaki örnekleme veri kümesinden tahmin edilen kestirim parametresi arasındaki farkı asgari seviyede tutabilmek ve bu hatanın mutlak bazı sebeplerden mi, yoksa tesadüfi özelliğe sahip bazı rastgele sebeplerden mi meydana geldiğini belirlemektir.

Uygulamada, bu gibi nedenlerden dolayı tahmin parametrelerinin sonuçlar üzerindeki olumsuzlukları açıklayabilmek veya bunlar hakkında inandırıcı bir karara varabilmek için hipotez testleri kullanılır. Her türlü hipotez testinin uygulanmasında temel görevi üstlenen parametrelerden biri, kümelerinin varyans değerleridir.

Bu nedene, bir uygulamada, varyans değerlerinin homojen dağılımda olmaları bazı basitlikler yanında işlemlerin hızı ve ekonomikliği yönünden hatırı sayılamayacak derecede fazla işlem kolaylığı da sağlamaktadır. Bu amaçla, uygulamada kullanılmakta olan parametrik varyansların homojenlik testleri aralarındaki, verilerin korelasyonlu veya korelasyonsuz olmalarına, sayılarına ve serbestlik derecelerine göre bir ayrıcalık sergilerler. Aynı kuramsal varyansa sahip bağımsız iki deneysel varyansın belli bir istatistik anlamlılık seviyesine göre istatistik irdelenmesinde *F testi* yeterli olurken, korelasyonlu olmaları halinde yetersiz kalmaktadır. Bu durumda daha gerçekçi sonuç, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılığı ya da korelasyonun da dikkate alındığı *Pitman* t-testinin kullanılması olur.

Tablo 51a: Tek veya çift örnek veri kümeleriyle ilgili testler

Hipotez testinin		Sıfır hipotezinin	
Bölümü	Adı	Test büyüklüğü	Sınır değeri
10.1	Tek Örnek z-Testi	$z = \dfrac{\hat{x} - \mu_0}{\sigma_x}$	z_α
10.2	Tek Örnek t-Testi	$t = \dfrac{\hat{x} - \mu_0}{s_{\hat{x}}}$	$t_{f,\alpha}$
10.3	Bağımsız İki Örnek Küme İle İlgili Hipotez Testleri	*Kuramsal standart sapmaları bilinen* $z = \dfrac{\lvert \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \rvert - \delta\mu}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$	z_α
		Kuramsal standart sapmaları bilinmeyen ve eşit $T = \dfrac{\lvert d \rvert - \delta\mu}{s_d} \rightarrow t(f)$	$t_{f,\alpha}$
		Kuramsal standart sapmaları farklı ve bilinmeyen $T = \dfrac{\lvert d \rvert}{s_d} \rightarrow t(f)$	
10. 4	Bağımlı*(İlişkili)* Ölçü Çiftleri Kümesi Ortalama Değerlerinin Testi	*Kuramsal standart sapmaları farklı* $t = \dfrac{\hat{x} - \hat{y}}{s_{(\hat{x}-\hat{y})}} \rightarrow t(f)$	
10.5		*Kuramsal standart sapmaları eşit* $t = \dfrac{\lvert \bar{d} \rvert}{s_{\bar{d}}} \rightarrow t(f)$	
10. 6	*Bağımlı(İlişkili)* Ölçü Çiftleri Kümesi Ortalama Değerlerinin Testi	*Kuramsal standart sapmaları eşit ve korelasyonlu* $t = \dfrac{\lvert \bar{d} \rvert}{s_{\bar{d}}} \rightarrow t(f)$	

İkiden fazla sayıda varyansın homojenliğinde ya da diğer bir ifadeyle belli bir istatistik güvenle eşit alınıp alınamayacaklarının irdelenmesi problemlerinde, veri sayısı ya da serbestlik dereceleri eşit olunca F_{max} , G_{max} testleri uygun neticeler verirken farklı olmaları halinde bu yöntemler yetersiz kalmaktadır. Böyle durumda *Bartlett* veya *Levene* testleri daha etkin sonuçlar vermektedir. Ancak, uygulamada, *Bartlett* ya da *Levene* testlerinden hangisinin daha iyi sonuçlar verdiği veri kümesindeki eleman sayısına bağlı olmaktadır. Veri sayısının az olduğu durumlarda *Levene* testi *Bartlett* testine göre daha etkin sonuçlar verdiğinden, bu gibi durumlarda en etkin uygulanabilir test yöntemi olduğu söylenebilir.

Tablo 51b: Varyansların homojenliği ile ilgili testler

Hipotez testinin		Sıfır hipotezinin	
Bölümü	Adı	Test büyüklüğü	Sınır değeri
11.1.1	Ardışık Ölçü Farklarından Hesaplanan Ortalama Hatanın Testi	$T = Min\left(\frac{s_H^2}{s^2}, \frac{s^2}{s_H^2}\right)$	*Özel tablo*
11.1.2	Kuramsal Standart sapmaları Eşit Ölçülerden Elde Edilmiş İki Deneysel Standart sapma De-ğerinin Karşılaştırıl-ması Testi	$T = \max\left\{\frac{s_1^2}{s_2^2}, \frac{s_2^2}{s_1^2}\right\}$	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$
11.1.3.	Pitman Testi	$t = \frac{(F-1)\sqrt{(n-2)}}{2\sqrt{F(1-r^2)}}$	$t_{f,\alpha}$
11.2.1	$F_{\max}$ hipotez testi,	$F_{\max} = \frac{\max(s_i^2)}{\min(s_i^2)}$	$F_{f,m,\alpha}$
11.2.2	$G_{\max}$ hipotez testi	$G_{\max} = \frac{s_{\max}^2}{s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots + s_m^2}$	$G_{m,f,S}$
11.2.3	Bartlett hipotez testi	$B = \frac{1}{c}\left\{f_0 \ Ln(s_0^2) - \left[f \ Ln(s^2)\right]\right\}$	$\chi^2_{m-1, 1-\alpha}$
11.2.4	Levene hipotez testi	$w = \frac{(n-m)\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{w_i} - \overline{w})^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(w_{ij} - \overline{w_j})^2}$	$F_{f_1, f_2, \alpha}$

Ancak, veri sayısının fazla ve gözlemlerin normal dağılımda olması halinde *Bartlett* testinin daha etkin ve basitçe uygulanabilir bir test yöntemi olduğu söylenebilir.

Ne var ki, veri sayısının yeterli sayıda az olduğu sınır bölgesinde hangi yöntemin seçilmesi veya uygulanması konusunda bir kavram karmaşası yaşanmaktadır. Bu gibi bir sorunu ortadan kaldırmak için, *Bartlett* testi, varyanslarla ilgili ilk verilere normal dağılım uyum iyiliği testlerinin uygulanması neticesinde yapılacak yorumların kabul edilebilir veya sıfır hipotezinin geçerli olması halinde uygulanması en pratik ve güvenilir bir yol olmaktadır.

12. BÜLÜM

UYUŞUMSUZ VERİLERİN İRDELENMESİ İLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

12. UYUŞUMSUZ ÖLÇÜLER TESTİ

Bütün elemanların dikkate alınarak uygulanan hipotez testlerinde uyumlu bir veri kümesindeki gözlem değerlerinin bütününün aynı ortak dağılıma sahip rastgele değişkenler olması gerekmektedir. Ancak, uygulamada bazı durumlar için örnekleme veri değerlerinin elde edilişinde; ortamın elverişsiz, kişi noksanlıkları veya kullanılan aletlerin yeteri koşulları sağlamaması gibi çeşitli nedenlerden dolayı verilerden en az biri ya da birkaçı böyle bir özelliğe sahip ortak dağılıma uymazlar. Bunlar verilerin ortak dağılım özelliklerini bozucu özellikte, aykırılık yaratan uyuşumsuz veriler olurlar. İstatistik biliminde, bu gibi verilere uyuşumsuz veriler *(Outliers)* denir.

Bir veri kümesinden bu gibi özelliğe sahip ölçülerin belli bir kurala göre tespit edilerek ayıklanmasına uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi denir. Pratikte, bu amaç için uygulanmakta olan istatistik anlamdaki hipotez testlerine uyuşumsuz ölçüler testi denmektedir. Bu testler aynı zamanda verilerin uyuşumlu ya da uyuşumsuz oldukları şeklinde gruplanmasında kullanılan sınıflama tekniğinin temel dayanağını oluştururlar.

Deneysel yollardan elde edilmiş verilerden kurulu bir veri kümesindeki uyuşumsuz ölçülerin parametrik hipotez testleri ile belirlenmesinde temel ilke olarak Bölüm 10.1 ve paragraf 10.2 ‘de anlatılmış olan tek örnek z testi ve tek örnek t testi yöntemleri esas teşkil etmektedir. Böyle bir hipotez testi işleminde, paragraf 10.1 veya paragraf 10.2 ‘deki gibi sadece ortalama değerin değil de, bütün verilerin birlikte bir irdelemesi gerçekleştirilmektedir.

Ancak, pratikte bu gibi hipotez testi işlemlerinin uygulanmasında; konuya yaklaşım biçimine veya irdelenecek verilerin ve esas alınan parametrelerin seçimine göre kullanılacak hipotez test yöntemleri bazı farklılıklar göstermektedir. Bu gibi farklılıklar göz önüne alındığında uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi amacıyla kullanılabilecek *parametrik* ve *non-parametrik* hipotez testi yöntemleri,

- *Ekstrem değerlere göre uyuşumsuz ölçüler testi*
- *Rosner hipotez testi*
- *Grubbs hipotez testi*
- *Data-snooping testi*
- *Walsh Hipotez testi*

olarak ele alınabilirler. Burada, genel anlamda sözü edilmiş bu yöntemlerin her biri özet olarak tanıtıldıktan sonra uygulanışları ayrıca verilecektir.

12.1. Ekstrem Değerlere Göre Uyuşumsuz Ölçüler Testi

Literatürde yer aldığı şekliyle, pratikte kullanılabilen ve herbiri normal dağılıma sahip *ekstrem* ölçü değerlerini esas alan konuyla ilgili birçok test yöntemi geliştirilmiştir. Bu test yöntemlerinden bazısında, tüm veri kümesindeki eleman sayılarının çokluğu*(sayısı)* yanında, tanımladıkları veri aralığı esas alınarak geliştirilmiş formüllerle arzulanan çözüme ulaşılırken, bazılarında ortalamaya göre standart sapma değerinin tanımladığı aralık temel alınmaktadır.

Ancak, ne var ki, bu yöntemlerin herbirinde çözüme ulaşmada farklı yaklaşımlar kullanılmış olsa bile hepsinde ortak temel amaç; tüm verileri uyuşumlu ya da uyuşumsuz diye iki gruba ayırmak, bir diğer ifade ile sınıflamaktır diye söylenebilir.

12.1.1. Dixon Testi

Uygulamada, bütün verilerin bulunduğu ortak dağılıma uymayan ekstrem ölçü değerlerinin diğer adıyla uyuşumsuz veri ya da verilerin ortak veri kümesinden tespit edilerek ayıklanmasında kullanılan istatistik hipotez testlerinden biri de *Dixon hipotez testi* yöntemidir. Böyle bir hipotez testi yöntemi; ortak veri kümesinde 3 ile 25 sayıda eleman bulunduğu zaman, bunlardan birkaçının *(çok az sayıda olanı)* uyuşumsuz veri olduğu durumda, uyuşumsuz olanlarının belirlenmesinde kullanılır. Bu amaçla, veri kümesini oluşturan her bir x_i elemanı için kabul edilen varsayıma uygun olarak

$$H_0 : x_i \quad \textit{verileri birbiri ile uyuşumludur}$$
$$H_s : x_i \quad \textit{verileri birbiri ile uyuşumlu değildir,}$$

şeklinde bir sıfır hipotezi kurulur.

Bu şekilde kurulmuş olan sıfır hipotezinin belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre istatistik olarak irdelenebilmesi için örnekleme veri kümesinin bütün elemanları küçükten büyüğe doğru $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n$ biçiminde büyüklük sırasında sıralanır. Bu şekilde sıralanmış elemanlarından her biri için tanımlanan *tau* istatistik değeri ya da standart dağılımlı rastgele değişken değerleri, sıralı veri kümesinin ortalamaya göre büyük ve küçük olanları tarafından başlamak üzere, Tablo 55 ‘de verilmiş formüllere göre hesaplanır (Tablo 52).

Böylece, örnek veri kümesi için irdelenecek τ test büyüklüğü, örnekleme veri kümesindeki toplam eleman sayısı ortalama 25 ‘den *(bazı kaynaklarda 20-30 olarak verilmektedir)* küçük olması halinde aşağıda verilmiş olan Tablo 52 ‘deki ilgili formüllerden hesaplanmış olur. Aksi takdirde, eleman sayısının daha fazla olması durumunda bu yöntemin kullanılmaması ilgili kaynaklarda ayrıca söylenmektedir.

Tablo 52: Toplam veri sayısına göre test büyüklüğü hesaplama formülleri

Ortak veri kümesindeki n eleman sayısı	Sıralı veri kümesinde ortalamaya göre uyuşumsuz olduğundan şüphelenilmiş veri için test büyüklüğü değeri	
	En üst uçtaki	*En alt uçtaki*
3 ile 7 arasında ise	$\tau = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$	$\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$
8 ile 10 arasında ise	$\tau = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$	$\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$
11 ile 13 arasında ise	$\tau = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$	$\tau = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$
14 ile 25 arasında ise	$\tau = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$	$\tau = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$

Bu şekilde hesaplanmış olan test büyüklüğüne karşılık gelen ilgili aralık için Q_{tablo} sınır değeri, $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre önceden hesaplanarak düzenlenmiş olan *Dixon* tablosundan alınır (Tablo 53).

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, eğer; $Q > Q_{tablo}$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir. Bu karşılaştırma neticesinde de aşağıdaki yorum yapılabilir.

Yorum: Böylece, $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre bu veri kümesinde en az bir ölçünün diğer verilerle ortak dağılımda olmadığına ya da bunun uyuşumsuz veri olduğuna karar verilir.

Tablo 53: Dixon tablo değerleri,

n	$\alpha = 0{,}10$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}02$	$\alpha = 0{,}01$
3	*0,886*	*0,941*	*0,976*	*0,988*
4	*0,679*	*0,766*	*0,847*	*0,889*
5	*0,559*	*0,643*	*0,729*	*0,782*
6	*0,484*	*0,563*	*0,646*	*0,698*
7	*0,433*	*0,507*	*0,587*	*0,636*
8	*0,398*	*0,467*	*0,542*	*0,591*
9	*0,370*	*0,436*	*0,508*	*0,555*
10	*0,349*	*0,412*	*0,482*	*0,527*
15	*0,284*	*0,338*	*0,398*	*0,438*
20	*0,251*	*0,300*	*0,356*	*0,393*
25	*0,230*	*0,277*	*0,329*	*0,364*
30	*0,216*	*0,260*	*0,310*	*0,342*

Not: Böyle bir karşılaştırma sonucunda eğer, $Q < Q_{Tablo}$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir. Bu durumda, veri kümesinde hiçbir uyuşumsuz verinin bulunmadığına ya da tümün uyuşumlu olduklarına karar verilir.

Örnek: Bir uzunluğun $n = 5$ kez ölçülmesinden elde edilen uzunluk ölçüsü değerleri *1216, 8448; 1216,8618; 1216,8628; 1216,8649; 1216,8669* olarak verilmektedir. Bu verilerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre uyuşumlu olup olmadıklarının *Dixon testi* ile irlenmesi istenmektedir

Çözüm: Böyle bir problemin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre *Dixon Q testi* ile istatistik olarak irdelenebilmesi için, yukarıda anlatılanlara paralel olarak

H_0 : x_i *verileri birbiri ile uyuşumludur.*

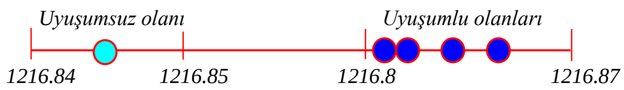
H_s : x_i *verileri birbiri ile uyuşumlu değildir*

şeklinde bir sıfır hipotezi kurulur.

Daha sonra bu veriler, küçük değerli olandan başlamak üzere;

1216,8448<1216,8618<1216,8628<1216,8649<1216,8669m.

biçiminde büyüklük sırasına dizilirler. Bu şekilde sıralanmış verilerden test büyüklüğü,



Şekil 35: Küme elemanlarının sayı doğrusu üzerindeki geometrik gösterimi

Şekil 35 'den görüleceği gibi ortalamaya göre en alt taraftan ve ortak veri sayısı $3 \leq n \leq 7$ aralığında olduğu için,

$$\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_5 - x_1} = \frac{1216{,}8618 - 1216{,}8448}{1216{,}8669 - 1216{,}8485} = 0{,}924$$

formülünden $\tau = 0{,}924$ olarak hesaplanır.

Daha sonra buna karşılık gelen sınır değeri de $n = 5$ ve $\alpha/2 \approx 0{,}02$ değerlerine göre *Tablo 53* 'den; $Q_{tablo} = 0{,}729$ olarak alınır.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından, $Q > Q_{tablo}$ olduğu için, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına *1216,8448m.* uzunluk ölçüsü değerinin diğer ölçü değerleri ile uyuşumlu olmadığı, bunun uyuşumsuz bir veri olduğu söylenebilir.

12.1.2 σ Standart Sapma Değerine Göre Ekstrem Ölçü Değerleri Testi

Normal dağılıma sahip bir $x \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ parametreli rastgele değişken için 25'den daha fazla sayıda yapılmış sonlu sayıda ölçülerden dağılıma uymayan en aykırı ya da uyuşumsuz kabul edilen bir veya birden fazla sayıda *Ekstrem* değerli ölçülerin belirlenmesi için σ standart sapmanın bilinmesi durumuna göre iki farklı istatistik test çözümü kullanılmaktadır. Uygulamada çoğu zaman *discordance testi* olarak da adlandırılan bu test yöntemlerinden herhangi birinin uygulanmasında, algoritma çözümü olarak benzer yollar izlenmesine rağmen,

- σ *kuramsal standart sapma değerinin bilinmesi,*
- s *deneysel standart sapma değerinin bilinmesi*

hallerine göre iki farklı test çözüm algoritmasından söz edilebilinir. Kuramsal σ standart sapmasının bilinmesi halinde sıralı verilerden en büyük ve aynı zamanda uç değerli olanı ele alınarak hiyerarşik bir düzende irdelenmesine rağmen, bilinmesi durumunda konu biraz daha karmaşık bir hal almaktadır. Böyle durumlarda, σ kuramsal standart sapma değeri yerine kullanılabilecek bir değer olan örnekleme veri kümesinden kestirilmiş s deneysel standart sapma değerinin her durumda bilinebilmesi veya mevcut olması ile uyuşumsuz veri irdelemesi algoritması biraz daha karmaşık bir yapıya dönüşerek daha da belirsizleşecektir. Burada, her bir durumla ilgili test algoritmaları ele alınarak, farklı durumlardaki uygulanabilirlikleri özetle açıklanacaktır.

12.1.2.1. σ Kuramsal Standart sapma Değerinin Bilinmesi Halinde Ekstrem Ölçü Değerleri Testi

Böyle bir test işleminde, $x \to N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin normal dağılım parametrelerinden σ^2 kuramsal varyans veya σ standart sapma değeri bilinmektedir. Bu duruma bir örnek, jeodezik ölçüler için normal dağılıma sahip $\varepsilon \to N(0\,,\,\sigma^2)$ gerçek hataları verilebilir. Burada konuyla ilgili, belli bir $S = 1 - \alpha$ olasılık seviyesine göre istatistik olarak irdelenmesinde, çözüme kavuşturulması gereken varsayım ya da irdelenmesi istenen sıfır hipotezi, veri kümesindeki herhangi bir x_E ekstrem değeri göstermek üzere,

$$H_0: \; x_E \in N(\mu\,,\,\sigma^2)$$
$$H_s: \; x_E \notin N(\mu\,,\,\sigma^2)$$

şeklinde kurulabilir.

Daha sonra, bu sıfır hipotezi ile ilgili standart *U*-dağılımına sahip bir standart rastgele değişken ya da diğer adıyla test büyüklüğü değeri,

$$U = \frac{|x_E - \hat{x}|}{\sigma} \to U(0\,,\,1)$$

bağıntısından hesaplanır.

Deneysel veri kümesi elemanlarından hesaplanacak bu standart dağılımlı değer ya da test büyüklüğü ile, buna karşılık gelen ilgili kuramsal dağılım tablosundan alınacak sınır değeri arasında bir karşılaştırma yapılır. Bu amaçla, n örnekleme veri kümesindeki veri sayısı ve $S=1-\alpha$ öngörülen bir istatistik anlamlılık seviyesine göre *U-dağılım* tablosundan bir u_S üst sınır değeri alınır (Tablo 54).

Tablo 54: *U-Dağılımı için üst güven sınırları*

$\alpha = P_r(U \geq U_s)$; x_E : *Ekstrem değeri*

$U = \dfrac{|x_E - \hat{x}|}{\sigma}$; σ : *Kuramsal standart sapma değeri*

n \ α	**0,10**	**0,05**	**0,01**	n \ α	**0,10**	**0,05**	**0,01**
3	*1,497*	*1,738*	*2,215*	14	*2,352*	*2,589*	*3,072*
4	*1,696*	*1,941*	*2,431*	15	*2,382*	*2,617*	*3,099*
5	*1,835*	*2,080*	*2,574*	16	*2,409*	*2,644*	*3,124*
6	*1,939*	*2,184*	*2,679*	17	*2,434*	*2,668*	*3,147*
7	*2,022*	*2,267*	*2,761*	18	*2,458*	*2,691*	*3,168*
8	*2,091*	*2,334*	*2,828*	19	*2,480*	*2,712*	*3,188*
9	*2,150*	*2,392*	*2,884*	20	*2,500*	*2,732*	*3,207*
10	*2,200*	*2,441*	*2,931*	21	*2,519*	*2,750*	*3,224*
11	*2,245*	*2,484*	*2,973*	22	*2,538*	*2,768*	*3,240*
12	*2,284*	*2,523*	*3,010*	23	*2,555*	*2,784*	*3,255*
13	*2,320*	*2,557*	*3,043*	24	*2,571*	*2,815*	*3,269*

Bu şekilde farklı yollardan elde edilmiş olan aynı büyüklüğün her iki farklı değerinin karşılaştırılmasından, eğer $U < u_s$ ise; H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum, $S=1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre veriler uyuşumludur denebilir.

Bu gibi bir karşılaştırma sonucunda eğer; $U > u_s$ ise; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir biçiminde tersi bir durumla karşılaşılırsa, o zaman aksi yönde bir karar verilir. Neticede yorum aşağıdaki gibi yapılabilir.

Yorum: bu durumda $S=1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre veriler uyuşumsuzdur denebilir.

Örnek: Bir uzunluk kuramsal ölçü duyarlığı $\sigma = \pm 5mm.$ olan bir uzunluk ölçer aletle $n=8$ kez ölçülerek,

$x_1 = 1864,220m \quad x_2 = 1864,235m \quad x_3 = 1864,210m \quad x_4 = 1864,216m$
$x_5 = 1864,230m \quad x_6 = 1864,242m \quad x_7 = 1864,224m \quad x_8 = 1864,226m$

değerleri elde ediliyor. Bu ölçülerden, $x_3 = 1864,210m$ ve $x_6 = 1864,242m$ değerleri $x \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ parametreli normal dağılıma girip girmediklerini $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığı ile irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin 10.1 ve 10.2 bölümlerinde söylenenlere uygun olarak irdeleyebilmek için, önce bir sıfır hipotezi,

$$H_0: \ x_3 \in N(\mu, \ \sigma^2) \quad \text{ve} \quad x_6 \in N(\mu, \ \sigma^2)$$
$$H_s: \ x_3 \notin N(\mu, \ \sigma^2) \quad \text{ve} \quad x_6 \notin N(\mu, \ \sigma^2)$$

şeklinde kurulur. Bu ölçülerle ilgili kesin değer veri kümesi elemanlarından,

$$\hat{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{[x]}{8} = 1864,2254m$$

olarak hesaplandıktan sonra bu sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüklerinden her biri,

$$u_3 = \frac{|x_E - \hat{x}|}{\sigma} = \frac{|1864,210 - 1864,2254|}{5} = \frac{|-15,4|}{5} = 3,08$$

$$u_6 = \frac{|x_E - \hat{x}|}{\sigma} = \frac{|1864,242 - 1864,2254|}{5} = \frac{|16,6|}{5} = 3,32$$

şeklinde hesaplanır.

Bunlara karşılık gelen tablo değeri $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre ilgili "*U-Dağılımı için üst güven sınırları"* tablosundan $q = 2,334$ olarak alınır (Tablo 54). Sonuçta her iki değerin karşılaştırılmasından,

eğer $u_3 = 3,08 > q$ ve $u_6 = 3,32 > q$ olduğundan, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: bu durumda her iki ölçü değeri $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre, $x \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımda değillerdir denebilir.

12.1.2.2. s Deneysel Standart Sapma Değerinin Bilinmesi Halinde Ekstrem Ölçü Değerleri Testi

Bu durumda, kuramsal σ standart sapma değerinin bilinmesi halindeki gibi bir işlem yolu izlenir. Ancak aralarındaki açık fark; formüllerdeki kuramsal σ standart sapma değeri yerine veri kümesinden kestirilen s deneysel standart sapma değeri ve ayrıca kuramsal değerlerle veri irdeleme işlemlerinde kullanılan "*U-Dağılımı için üst güven sınırları"* tablosu yerine de "*V-Dağılımı"* ya da *"V-Dağılımı için üst güven sınırları"* tablosunun kullanılmasıdır. Bu amaçla kurulacak bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : \ x_E \in N(\mu\,,\ \sigma^2)$$
$$H_s : \ x_E \notin N(\mu\,,\ \sigma^2)$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce söylenenlere benzer şekilde hareket edilerek, sıfır hipotezle ilgili test büyüklüğü değeri,

$$V = \frac{|x_E - \hat{x}|}{s} \rightarrow V(0\,,\ 1)$$

formülünden hesaplanır.

Buna karşılık gelen V_α sınır ya da tablo değeri de; n ölçü sayısı ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre, "*V-Dağılımı için üst güven sınırları"* tablosundan alınır (Tablo 55).

Tablo 5 : *V-Dağılımı için üst güven sınırları*

$\alpha = P_r(V \geq V_s)$, x_E : *Ekstrem Değer* $V = \dfrac{\lvert x_E - \hat{x}\rvert}{s}$; $s = \pm\sqrt{\dfrac{[(x-\hat{x}]}{n}}$							
α / n	0,10	0,05	0,01	α / n	0,10	0,05	0,01
3	*1,406*	*1,412*	*1,414*	14	*2,297*	*2,461*	*2,759*
4	*1,645*	*1,689*	*1,723*	15	*2,326*	*2,493*	*2,837*
5	*1,791*	*1,869*	*1,955*	16	*2,354*	*2,523*	*2,837*
6	*1,894*	*1,996*	*2,130*	17	*2,380*	*2,551*	*2,871*
7	*1,974*	*2,093*	*2,265*	18	*2,404*	*2,577*	*2,903*
8	*2,041*	*2,172*	*2,374*	19	*2,426*	*2,600*	*2,932*
9	*2,097*	*2,237*	*2,464*	20	*2,447*	*2,623*	*2,959*
10	*2,146*	*2,294*	*2,540*	21	*2,467*	*2,644*	*2,984*
11	*2,150*	*2,343*	*2,606*	22	*2,486*	*2,664*	*3,008*
12	*2,229*	*2,387*	*2,663*	23	*2,504*	*2,683*	*3,030*
13	*2,264*	*2,426*	*2,714*	24	*2,520*	*2,701*	*3,051*

Bu iki değerin karşılaştırılması neticesinde, eğer $V < V_\alpha$ ise *(test büyüklüğünün tablo değerinden küçük olması halinde)* sıfır hipotezi kabul, seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum; veriler n ölçü sayısı ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılımdadır denebilir. Aralarında herhangi bir uyuşumsuz veri bulunduğu söylenemez.

Tersi durumda, eğer $V > V_\alpha$ ise *(test büyüklüğünün tablo değerinden küçük olması halinde)* sıfır hipotezi ret, seçenek hipotezi kabul edilir.

Bunu neticesinde yapışacak bir yorum; veriler n ölçü sayısı ve $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılımdadır denemez. Aralarında uyuşumsuz veri bulunmaktadır şeklinde özetlenebilir.

Örnek: Arazide iki nokta arasındaki bir mesafe bir uzunluk ölçer aletle $n = 8$ kez ölçülerek,

$$x_1 = 1864{,}220m \quad x_2 = 1864{,}235m \quad x_3 = 1864{,}210m \quad x_4 = 1864{,}216m$$
$$x_5 = 1864{,}230m \quad x_6 = 1864{,}242m \quad x_7 = 1864{,}224m \quad x_8 = 1864{,}226m$$

değerleri elde ediliyor. Bu ölçülerden,

$$x_3 = 1864{,}210m \quad \text{ve} \quad x_6 = 1864{,}242m$$

değerleri $x \to N(\mu, \sigma^2)$ parametreli normal dağılıma girip girmediklerini $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile hesaplanmak istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin çözümü için paragraf 10.2 ‘de söylenenlere uygun yönde; ilk işlem adımı olarak sıfır hipotezi,

$$H_0: \ x_3 \in N(\mu,\ \sigma^2) \quad \text{ve} \quad x_6 \in N(\mu,\ \sigma^2)$$
$$H_s: \ x_3 \notin N(\mu,\ \sigma^2) \quad \text{ve} \quad x_6 \notin N(\mu,\ \sigma^2)$$

şeklinde kurulur. Ölçülerin kesin değeri

$$\hat{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{[x]}{8} = 1864{,}2254m$$

ve deneysel standart sapma değeri,

$$s = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{745,88}{8-1}} = \pm 10,323mm$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra verilenlerle buradan hesaplanmış değerler kullanılarak irdelenmek istenen her bir ölçü ile ilgili standart dağılımlı rastgele değişken değerleri veya test büyüklükleri,

$$v_3 = \frac{|x_E - \hat{x}|}{s} = \frac{|1864,210 - 1864,2254|}{10,323} = \frac{|-15,4|}{10,323} = 1,492$$
$$v_6 = \frac{|x_E - \hat{x}|}{s} = \frac{|1864,242 - 1864,2254|}{10,323} = \frac{|16,6|}{10,323} = 1,608$$

olarak elde edilir. Bunlara karşılık gelen tablo değeri, daha önceden $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre "*V-Dağılımı için üst güven sınırları*" tablosundan,

$$V_\alpha = 2,172$$

olarak alınır (Tablo 53).

Sonuçta, test büyüklük değerlerinin bu sınır değeri ile karşılaştırılmasından,

$$v_3 = 1,492 < V_\alpha \qquad \text{ve} \qquad v_6 = 1,608 < V_\alpha$$

olduğundan, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: bu durumda her iki ölçü değeri $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığına göre, $x \to N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımdadırlar denebilir. Ya da uyuşumlu verilerdir denebilir.

12.2. Rosner Testi

Normal dağılıma uymayan uyuşumsuz verilerin belirlenmesinde kullanılmakta olan *Rosner* hipotez testinde, s deneysel standart sapmanın bilindiği durumda uygulanmakta olan *V*-dağılımına dayalı geliştirilmiş olan *ekstrem* değerlerin belirlenmesi yönteminin aksine burada 25 ya da daha fazla sayıdaki elemandan oluşan veri kümesinde en fazla 10 tanesi uyuşumsuz veri sayılması durumunda kullanılabilir bir yöntem olmasıdır.

Ayrıca, *Rosner* testinin parametrik bir test yöntemi olması nedeniyle, uyuşumlu verilerin normal dağılıma sahip gözleme sonuçları oldukları söylenebilir. Bu özellik *Rosner* testinin tüm verilere uygulanmasından normal dağılımdan sapan aşırı uç değerlerin kabaca belirlenmesinde işe yarar. *Rosner* hipotez testinin uygulanmasında bu gibi özel durumların varlığı, onun uygulanmasını da diğer test yöntemlerine oranla biraz daha karmaşık hale sokar. *Rosner* hipotez testinde böyle bir karmaşıklık,

H_0 : *Veriler arasında uyuşumsuz ölçü bulunmamaktadır*
H_s : *Veriler arasında en az bir uyuşumsuz ölçü bulunmaktadır*

şeklinde kurulmakta olan sıfır hipotezinden ziyade, örnekleme veri kümesinden hesaplanacak olan standart dağılıma sahip rastgele değişkenin ya da test büyüklüğünün elde edilmesi ile ilgilidir. Bu amaçla yapılacak bir hesaplama için ilk işlem adımı olarak veriler küçükten büyüğe doğru büyüklük sırasına dizilirler.

Sonra ilk bakışta uyuşumsuz veriler diye $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre irdelemeye alınacak bu sıralı veri dizisindeki r_0 sayıda $r_0 \leq 10$ olacak şekilde uyuşumsuz sayılabilecek aykırı uç değerleri ya grafik normal dağılım eğrisinden sapmalarla ya da diğer *winsorized* yollardan kolayca tespit edilir (Şekil 35).

Daha sonra, bu aşırı uç değerleri ile ilgili *Rosner* 'in test istatistikleri $r_0 = r$ aşırı değerler olmadan ilk adımda uyuşumlu sayılan verilerden elde edilmiş veri kümelerinin, $\hat{x}^{(r)} = \frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{n-r} x_j$: *küme ortalaması ve* $s^{(r)} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n-r}\frac{(x_j - \hat{x}^{(r)})^2}{n-r}}$: *standart sapma* değerleri olmak üzere,

$$R_{r+1} = \frac{\left| x^{(r)} - \hat{x}^{(r)} \right|}{s^{(r)}}$$

formülü kullanılarak kademeli bir biçimde en büyük aykırı değerden en küçük aykırı değerli olan uyuşumsuz veriye doğru hesaplanır.

Sonra bu test büyüklüğü, Ek Tablo 11 ‘de verilmiş olan *Rosner* tablosundan alınan R_α kritik değerle karşılaştırılır.

Her iki değerin karşılaştırılması neticesinde $R_r < R_\alpha$ Rosner kritik değerinden küçük ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: veriler $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile uyuşumludur denir. Aksi halde tersi yönde bir yorum yapılır.

Örnek: Bir deneme sonucunda küçükten büyüğe doğru büyüklük sırasında sıralanmış değerler,

2,07	*40,55*	*84,15*	*88,41*	*98,84*	*100,54*	*115,37*
121,19	*122,08*	*125,84*	*129,47*	*131,90*	*149,06*	*163,89*
166,77	*171,91*	*178,23*	*181,64*	*185,47*	*187,64*	*193,73*
199,74	*209,43*	*213,29*	*223,14*	*225,12*	*232,72*	*233,21*
239,97	*251,12*	*275,36*	*395,67*			

olarak elde edilebilmektedir. Rosner hipotez testine göre bu değerlerden hangilerinin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile uyuşumsuz veri sayılabileceklerinin irdelenmesi istenmektedir.

Çözüm: Bu verilerin bir normal dağılım grafiği çizimi sonucundan, verilerin normal dağılımda olmadıklarından şüphe duyulmaktadır.

Bu nedenle dağılım grafiğinden dört adet en uçlardaki potansiyel aykırı değerler: *2,07; 40,55; 275,36 ve 395,67* olarak belirlenir. Daha sonra bu dört aykırı değerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile *Rosner* testi ile irdelenmesi için aşağıdaki işlemler yapılır.

- Uyuşumsuz oldukları kabul edilen bu dört veriden en büyüğünden başlamak kaydı ile her bir değer teker teker veri kümesinden çıkartılarak arda kalan verilerden oluşan alt kümenin ortalaması ve standart sapma değerleri hesaplanır (Tablo 56)
-

Tablo 56 : *İlk adımda aykırı uç değerlerinin ayıklanmasından sonra hesaplanmış ortalama ve standart sapma değerleri*

r	Ortalamalar	Standart sapma değerleri	Grafikten uyuşumsuz değer oldukları kabul edilen aykırı değerler
	$\hat{x}^{(r)}$	$s^{(r)}$	$x^{(r)}$
0	*169,923*	*75,133*	*395,67*
1	*162,640*	*63,872*	*2,07*
2	*167,993*	*57,460*	*40,55*
3	*172,387*	*53,099*	*275,36*

- Daha sonra, $r=0$, $r=1$, $r=2$, $r=3$ her bir durumu için test büyüklükleri hesaplanarak, $n=32$, $r=4$, $r=3$, $r=2$, $r=1$ değerleri ve $\alpha=0{,}05$ yanılma olasılığı ile *EK Tablo 11* 'de verilmiş olan *Rosner* testi tablosundan alınan sınır değerleri ile karşılaştırılır.

Tablo 57: Test büyüklüklerinin hesabı ve Rosner tablo değerleri ile karşılaştırmaları

	$R_{r+1}=\dfrac{\left\|x^{(r)}-\hat{x}^{(r)}\right\|}{s^{(r)}}$ Test büyüklüğü	$R_\alpha=R_{0,05}$ Sınır değeri	Karşılaştırmalar	Sonuçlar
$r=3$	$R_4=\dfrac{\left\|x^{(3)}-\hat{x}^{(3)}\right\|}{s^{(3)}}\dfrac{\left\|275{,}36-172{,}387\right\|}{53{,}099}=1{,}94$	$R_{32,4,0,05}=2{,}89$	$R_4<R_{32,4,0,05}$	Uyuşumlu
$r=2$	$R_3=\dfrac{\left\|x^{(2)}-\hat{x}^{(2)}\right\|}{s^{(2)}}=\dfrac{\left\|40{,}55-167{,}993\right\|}{57{,}460}=2{,}22$	$R_{32,3,0,05}=2{,}91$	$R_3<R_{32,3,0,05}$	Uyuşumlu
$r=1$	$R_2=\dfrac{\left\|x^{(1)}-\hat{x}^{(1)}\right\|}{s^{(1)}}=\dfrac{\left\|2{,}07-162{,}640\right\|}{63{,}872}=2{,}51$	$R_{32,2,0,05}=2{,}92$	$R_2<R_{32,2,0,05}$	Uyuşumlu
$r=0$	$R_1=\dfrac{\left\|x^{(0)}-\hat{x}^{(0)}\right\|}{s^{(0)}}=\dfrac{\left\|395{,}67-169{,}923\right\|}{75{,}133}=3{,}01$	$R_{32,1,0,05}=2{,}94$	$R_1>R_{32,1,0,05}$	Uyuşumsuz

Yorum: Tablo 57 'dan da görüldüğü gibi, burada yapılan irdelemeler sonucunda $\alpha=0{,}05$ yanılma olasılığı ile sadece bir tane; 395,67 değerinin uyuşumsuz veri olduğuna karar verilir.

12.3. Grubbs Hipotez Testi

Uyuşumsuz gözlemlerin belirlenmesinde kullanılan testlerden biri de *Grubbs* hipotez testidir. Bu test, *1969* yılında *GRUBBS* ve *1972* yılında *STEFANKY* tarafından *univariyant* bir veri kümesindeki uyuşumsuz verilerin belirlenmesi amacıyla kullanılmıştır. Bilindiği gibi *Grubbs hipotez testi*, her şeyden önce verilerin bir normal dağılımda oldukları varsayımına dayanmaktadır. Dolayısı ile bir parametrik test yöntemi olmaktadır. Bu test yardımıyla her seferinde uyuşumsuz veriler tespit edilerek, en uyuşumsuz olan veri, veri kümesinden çıkartılır. Sonra arda kalan verilerle test aynı şekilde tekrarlanarak uygulanır. Veri kümesinde hiçbir uyuşumsuz veri kalmayıncaya kadar iterasyona devam edilir.

Ancak, böyle ardı sıra uygulanan iterasyon sayısının fazla olması uyuşumsuz ölçü belirleme olasılığını da değiştirir. Bu nedenle *Grubbs testi,* bir örnekleme veri kümesinde uyuşumsuz veri sayısının altı ya da uyuşumlu olanların sayısından fazla olması halinde uygulanmaması önerilir. Bu amaçla, tek değişkenle ilgili bir veri kümesi için uygulanacak *Grubbs testi* ile ilgili hipotez,

H_0 : *Veri kümesinde uyuşumsuz veri bulunmamaktadır*
H_S : *Veri kümesinde en az bir uyuşumsuz veri bulunmaktadır*

şeklinde kurulabilir. Bununla ilgili test büyüklüğü,

$$t = \frac{\max|x_i - \hat{x}|}{s}$$

olarak hesaplanır.

Burada, $\hat{x}$, s veri kümesinin ortalaması ve standart sapması değerlerini göstermektedir.

Buradan hesaplanan test büyüklüğüne karşılık gelen kuramsal *t-tablo* sınır değeri, önceden seçilen bir α yanılma olasılığına dayalı olarak, her bir veri için hesaplanan $\alpha/2n$ yanılma olasılığı değerine ve *(n-2)* serbestlik derecesine göre; *t-student* dağılım tablosundan alınan $t_{(\alpha/(2n),n-2)}$ değerinden faydalanarak,

$$q = \frac{(n-1)}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{t^2_{(\alpha/(2n),n-2)}}{n-2+t^2_{(\alpha/(2n),n-2)}}}$$

formülünden hesaplanır. Ya da benzer şekilde t-student dağılım değerlerinden faydalanarak düzenlenmiş *τau* dağılım tablosundan doğrudan alınabilir.

Sonuçta, burada her iki değer arasında yapılacak bir karşılaştırma neticesinde; eğer, $t \leq q$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile verilerin arasında uyuşumsuz herhangi bir veri bulunmamaktadır yanı veriler uyuşumlu oldukları söylenebilir.

Aksi halde, eğer, $t > q$ ise; H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile verilerin arasında uyuşumsuz herhangi bir verinin bulunduğu ya da verilerin uyuşumsuz oldukları söylenebilir.

12.4. Data-Snooping Testi

Jeodezik uygulamalarda sıkça sözünden edilen "*Data-Snooping*" testinde $x \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ parametrelerine göre normal dağılımda olan rastgele değişkenin n sonlu sayıda yapılan x_i gözlem değerlerinden hangilerinin ortak dağılıma uymadığının araştırılması ön görülmektedir (*Baarda 1968*). Bu durumuyla, *Data-snooping* test yöntemi paragraf 10.1 'de anlatılmış olan *tek örnek z-testi* yönteminin bütün veri kümesi elemanlarına topluca bir arada ele alınarak uygulanmış biçimi olmaktadır. Bu nedenle, *BAARDA*, bu yöntemi ilk defa kuramsal normal dağılım parametrelerinden σ standart sapma değerinin bilinmesi durumunda ele alıp uygulamıştır. Bu amaçla, duruma uygun bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : x_i \in N(\mu, \sigma^2)$$
$$H_s : x_i \in N(\mu, \sigma^2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sıfır hipotezine uygun standart normal dağılıma sahip rastgele dişken değerleri ya da diğer adıyla sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğü, her bir ölçü kümesi elemanı için,

$$z_i = \frac{|x_i - \mu|}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

formülünden hesaplanabilir.

Ancak, burada uyuşumsuz verilerin belirlenmesi için, μ kuramsal parametresi yerine örnekleme veri kümesinden kestirilmiş $\hat{x}$ tahmin değerinin kullanılmış olması da yöntemin pratik amaçlar için uygulanma sonucunu da pek fazla değiştirmemektedir. Bu nedenle, *BAARDA*'nın 1968 'de önerdiği *Data snooping* yönteminde standart dağılımlı rast gele değişken için,

$$w_i = \frac{|x_i - \hat{x}|}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

test büyüklüğü değeri kullanılabilmektedir. Bir sonraki hipotez testi işlem adımında, bu verilerin, μ kuramsal ortalama ve σ kuramsal standart sapma parametre değerlerine sahip, ortak bir normal dağılma uyup uymadıklarının irdelenebilmesi için, önceden belirlenmiş, ön görülen α yanılma olasılığına göre q tablo sınır değeri ilgili normal dağılım tablosundan doğrudan ya da *F-Fisher* dağılım tablolarından,

$$q = N_{\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,\alpha_0/2}}$$

olarak bulunur.

Burada; veri kümesindeki herhangi bir ölçünün yanılma olasılığını temsil eden α_0 değeri; n sayıda elemandan kurulu örnekleme veri kümesinin bütün elemanları için verilmiş olan $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığından faydalanarak $\alpha_0 = \alpha/n$ bağıntısına göre hesaplanmaktadır.

Böyle bir yanılma olasılığı ifadesi, istatistikte bağımsız olayın birlikte olma olasılığını ifade eden *Bayes kuralı* bağıntısından faydalanılarak geliştirilebilir. Bu amaçla, her biri normal dağılıma sahip ve birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerin bileşik olasılık bağıntısından hareketle,

$$1 - \alpha = (1 - \alpha_0)(1 - \alpha_0)......(1 - \alpha_0) = (1 - \alpha_0)^n$$

yazılabilir. Bu formülde her bir ölçü için tanımlanmış olan α_0 yanılma olasılığı değeri diğer teriminin yanında çok küçük bir miktar olacağı göz önüne alınarak yaklaşık *Binom* seri açılımından

$$1 - \alpha \cong 1 - n\alpha_0$$

olarak ifade edilebilir. Sonuçta bu bağıntıdan, $\alpha = 1 - (1 - n\alpha_0)$ ve neticede $\alpha = n\alpha_0$ yazılarak buradan bir ölçü için yanılma olasılığı $\alpha_0 = \alpha/n$ olarak bulunur.

Daha sonra sıfır hipotezinin geçerliliğini irdelemek amacıyla, bu sınır değeri ile, test büyüklüğü olarak hesaplanmış olan her bir w_i standart normal dağılıma sahip rastgele değişken değerleri karşılaştırılır.

Karşılaştırma sonucunda eğer $w_i \le q$ ya da $|x_i - \hat{x}| \le q\sigma$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: x_i ölçü değerleri α yanılma olasılığına göre aynı dağılımda ve uyuşumludur denebilir.

Tersi durumda, eğer $w_i > q$ ya da $|x_i - \hat{x}| > q\sigma$ olması halinde, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: O zaman x_i ölçü değerleri α yanılma olasılığına göre aynı dağılımda ve uyuşumlu oldukları söylenemez.

Not: Buradan görüldüğü gibi, bütün verilerin ya da ölçülerin standart rastgele değişken durumuna dönüştürülmesinde, normal dağılımın μ gerçek*(kuramsal)* ortalama ve σ standart sapma değerleri kullanıldığından bütün işlemler gerçek *(kuramsal)* ölçü hatalarına göre gerçekleştirilmektedir. Bunun neticesinde böyle bir hipotez testinde $\varepsilon_i = x_i - \mu$ gerçek hataları irdelenmiş olmaktadır. Bu haliyle burada anlatılmış olan *Data-snooping* (*uyuşumsuz ölçüler*) hipotez testi, μ ve σ kuramsal parametre değerlerine göre gerçekleştirilmiş olduğundan, düşünce itibariyle ilk bakışta sanki; rastgele ölçü hatası değerlerine yakın ancak kaba hata sayılabilecek türden olan kaba hatalı ölçülerin belirlenmesi ve ölçü kümesinden ayıklanmaları için kullanılabilir bir yöntem olmaktadır.

Bu nedenle, geçmişte bu yönteme, çoğu zaman, kaba hatalı ölçülerin belirlenmesi ve ölçü kümesinden ayıklanmaları için gerçekleştirilmiş bir yöntem veya hipotez testi gözüyle de bakılmıştır. Bu nedenle de adına bazı kaynaklarda "*kaba hatalı ölçülerin belirlenmesi yöntemi"* denmiştir.

Ancak, uygulamada çoğu zaman, ölçülerin normal dağılımda oldukları bilinse bile, bunların oluşturduğu örnekleme veri kümelerinin kuramsal μ ortalama ve σ standart sapma değerleri bilinemez. Böyle durumlarda kuramsal standart sapma yerine kullanılabilecek bir tahmin değeri; $\hat{x}$ deneysel ortalama ve s deneysel standart sapma değerleri, n sonlu sayıda örnekleme veri kümesinden özel kestirim yoluyla elde edilerek ancak bilinebilirler.

Bu durumda, *BAARDA 'nen* kuramsal parametre değerlerine göre geliştirilmiş olduğu "*Kaba hatalı ölçüler testi"* ya da *BAARDA 'nin" Data-snooping testi yöntemi"* yukarıda anlatıldığı gibi değil de, $\hat{x}$ deneysel ortalama ve s deneysel standart sapma değerleri kullanılarak gerçekleştirilir. Bu durumda, bütün ara işlemlerde deneysel kestirim değerleri kullanıldığı için de adına "*uyuşumsuz ölçüler testi*" denir. Çünkü, böyle bir durumda bütün işlemler, gerçek ölçü hatalarına göre değil de, gerçek hataların bir fonksiyonu *(2-12)* olarak ifade edilebilen ve her haliyle değerleri her zaman analitik olarak bilinebilen $v_i = x_i - \hat{x}$ *görünen ölçü hatalarına* ya da bunun ters işaretli değeri olan $v_i = |x_i - \hat{x}| = \hat{x} - x_i$ *görünen ölçü düzeltmelerine* göre yapılmaktadır.

Sonuçta, veri kümesinden elde edilmiş $\hat{x}$ deneysel ortalama ve s deneysel standart sapma değerleri kullanılarak benzer formülle hesaplanacak standartlaştırılmış rastgele değişken artık normal dağılım da olmaz. Bunun yerine, normal dağılımdan biraz farklı olan f serbestlik dereceli *t*-dağılımında olur. Böylece, başlangıçta, *tek örnekli z-testi* esas alınarak gerçekleştirilen *BAARDA 'nin "Data-snooping testi"*, *n* sonlu sayıdaki veri kümesi için biraz değişmiş veya bozulmuş bir şekli olmakta ve neticede Bölüm 10.2 'de anlatılmış olan "*tek örnekli t-testi* " esas alınarak yapılmaktadır.

Böyle bir *t*-testi kullanılarak yapılacak bir uyuşumsuz ölçüler *(Data-snooping)* testinde,

$$t = (x_i - \hat{x})/s$$

test büyüklüğü olarak seçilen standart dağılımlı rastgele değişkenin hesaplanmasında

$$s = \pm\sqrt{([vv] - v_i^2)/f}$$

deneysel standart sapma değeri kullanılmaktadır.

Bu durumda, s değerinin hesaplanmasında, *Data-snooping* testi yönteminin kuramsal doğası gereği, parametre kestirimi neticesinde elde edilen ölçü düzeltmeleri kümesinden uyuşumsuz olanları dahil edilmeden arda kalan düzeltmelerin karelerinin toplamının $f = n - 1$ serbestlik derecesine bölümü esas alınmaktadır.

Böyle bir durumda, başlangıçta hangi ölçünün ya da ölçülerin uyuşumsuz olduğu kesin olarak bilinemez. Bu amaçla, hangi test yöntemleri kullanılmış olursa olsun, yapılan bazı hesaplamalar veya irdelemeler neticesinde bunlardan belli bir olasılık dahilinde uyuşumsuz kabul edilenleri ancak kestirilebilir. Uyuşumsuz verilerin belirlenmesindeki bu kesinsizlik aynı zamanda, konunun oldukça karmaşık bir problem olmasına neden olur.

Uygulamada, bu gibi bir kesinsizliği bir derecede olsa, giderebilmek için her seferinde en uyuşumsuz verinin ayıklanması sonucunda elde edilen yeni veri kümesine aynı yöntemin ardı sıra *iteratif* bir şekilde uygulanarak arzulanan çözüme ulaşılmaya çalışılır. Bu haliyle her seferinde test büyüklüğünün yeniden hesaplanması sırasında böyle bir olumsuz etki hiçbir zaman tam giderilmiş olamayacağından, uyuşumsuz ölçülerin ayıklanması neticesinde, s standart sapma değeri de gerçekçi bir biçimde tam olarak bilinemez.

Uygulamada, böyle bir olumsuzluğu bir sonuca bağlayabilmek için, standart sapma değerinin hesaplanış biçimi yanında verilerin sahip olduğu *t-dağılım* değerleri ile az da olsa biraz oynanılarak bazı değişiklikler gerçekleştirilir. Çünkü böyle bir sorun, n veri sayısının fazla olduğu durumlarda önemli bir problem yaratmazken, az olduğu hallerde bazı olumsuz sonuçlara neden olmaktadır. Bu amaçla, standart dağılımlı rastgele değişkene karşılık gelen kritik sınır değeri; $f = n-1$ serbestlik dereceli ve $\alpha = 1-S$ yanılma olasılıklı *t-dağılım* fonksiyonundan doğrudan ya da bu değere bağlı olarak,

$$\tau_f = \frac{t_{f-1}\sqrt{f}}{\sqrt{f-1-t_{f-1}^2}}$$

formülünden hesaplanan τ -dağılım değeri olarak alınır. Aynı değer, uygulamada çoğu zaman daha pratik olması bakımından bu değerlere karşılık gelen, τ *-tau* dağılım tablosunda doğrudan alınabilir(Tablo 58).

Bilindiği gibi, τ *-tau* dağılım ile *t*-dağılım değerleri f serbestlik derecesini küçük olduğu durumlarda oldukça farklı değerli olmaktadır. Buna karşılık, f serbestlik derecesi büyük değerli olduğunda aralarındaki bu fark önemsenmeyecek mertebeden az olmaktadır (Tablo 2). Bu nedenle, sıfır hipotezinin irdelenmesinde kullanılan test büyüklüğü ile ilgili sınır değeri, $\alpha = 1-S$ yanılma olasılığına ve f serbestlik derecesine göre; ya doğrudan τ *-tau* dağılım tablosundan ya da *t-student* dağılım tablosundan alınır.

Uygulamada çoğunlukla, t_f *-tablo* değerinden faydalanarak yukarıda verilmiş formülden hesaplanır. Benzer bir durum f serbestlik derecesinin çok büyük olduğu zaman, normal dağılım değerleri için de geçerli olmaktadır (Tablo 12). Hatta pratikte, $f \to \infty$ için eşit olabilecekleri ve neticede *t-dağılımı* ve τ *-tau dağılımı* yerine *normal dağılım* değerlerinin de rahatlıkla kullanılabileceği söylenebilir.

Tablo 58: $\alpha = 0{,}05$ *Göre* t_f *ve* τ_f *, N(0,1) Dağılımları İçin Değerler*

f	$t_{f,1-\alpha_0}$	$\tau_{f,1-\alpha_0}$	$N_{1-\alpha_0}$	$t-\tau$	f	$t_{f,1-\alpha_0}$	$\tau_{f,1-\alpha_0}$	$N_{1-\alpha_0}$	$t-\tau$
2	4,303	1,41	1,96	2,893	18	2,101	1,933	1,96	0,168
3	3,182	1,645	1,96	1,537	19	2,093	1,934	1,96	0,159
4	2,776	1,757	1,96	1,019	20	2,086	1,936	1,96	0,150
5	2,571	1,814	1,96	0,757	21	2,080	1,937	1,96	0,143
6	2,447	1,848	1,96	0,599	22	2,074	1,938	1,96	0136
7	2,365	1,870	1,96	0,496	23	2,069	1,939	1,96	0,130
8	2,306	1,885	1,96	0,421	24	2,064	1,940	1,96	0,124
9	2,262	1,896	1,96	0,366	25	2,060	1,941	1,96	0,119
10	2,228	1,904	1,96	0,324	26	2,056	1,942	1,96	0,114
11	2,201	1,910	1,96	0,291	27	2,052	1,943	1,96	0,109
12	2,179	1,915	1,96	0,264	30	2,042	1,945	1,96	0,097
13	2,160	1,920	1,96	0,240	35	2,030	1,947	1,96	0,083
14	2,,145	1,923	1,96	0,222	40	2,021	1,949	1,96	0,072
15	2,131	1,926	1,96	0,205	50	2,009	1,951	1,96	0,058
16	2,120	1,929	1,96	0,191	60	2,000	1,953	1,96	0,047
17	2,110	1,931	1,96	0,179	80	1,990	1,955	1,96	0,033
18	2,101	1,933	1,96	0,168	100	1,984	1,956	1,96	0,028

Sonuçta, n sonlu sayıda ölçüden oluşan bir veri kümesinin bütün elemanlarının kendi aralarında uyuşumlu olup olmadıklarının belli bir $S = 1-\alpha$ anlamlılık seviyesine göre irdeleyebilmek için, sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğü,

$$t = \frac{|x_i - \hat{x}|}{s}$$

bağıntısından hesaplanabilir. O zaman bu t değeri, yukarıda söylendiği gibi, f serbestlik derecesinin küçük miktarları için $\tau \to \tau(f)$ *-tau* dağılımında, büyük değerleri için $\tau \to t(f)$ *t-dağılımında* ve çok büyük değerler için de $\tau \to N(\hat{x}, s^2)$ *normal dağılımda* alınabilir.

Bunun neticesinde t test büyüklüğüne karşılık gelen sınır değeri de bu dağılım tablolarından yukarıda sözü edilmiş özelliklere dikkat edilerek,

- *τ -tau tablosu kullanılacaksa,* $q = \tau_{f,1-\alpha_0/2} = \dfrac{t_{f-1,1-\alpha_0/2}\sqrt{f}}{\sqrt{f-1-t^2_{f-1,1-\alpha_0/2}}}$
- *t-dağılım tablo değerleri kullanılacaksa* $q = t_{f-1,1-\alpha_0/2}$
- *Normal dağılım tablo değerleri kullanılacaksa* $q = N_{1-\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha_0}}$

olarak elde edilir.

Data-snooping testi için kurulmuş sıfır hipotezinin irdelenmesi amacıyla bu şekilde yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilmiş z_i veya w_i standart normal dağılıma sahip rastgele değişken değerinin $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılım tablosundan alınmış q sınır değeri ile karşılaştırılır.

Bu karşılaştırmada, eğer $z_i \leq q$ ya da $|x_i - \hat{x}| \leq s\, q$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: x_i ölçü değerleri α yanılma olasılığına göre aynı dağılımda ve uyuşumludur denebilir.

Tersi durumda, eğer $z_i > q$ ya da $|x_i - \hat{x}| > s\, q$ olması halinde, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir. O zaman x_i ölçü değerleri α yanılma olasılığına göre aynı dağılımda ve uyuşumlu oldukları söylenemez tersi yöndeki yorumu yapılabilir.

jeodezik gözlemlerin irdelenmesi uygulamasında uyuşumsuz olan gözlemleri belirlemek amacıyla aynı yöntem ve yaklaşım, herbiri $l_i \rightarrow N(\mu_{l_i}, \sigma^2_{l_i})$ parametrelerine göre normal dağılıma sahip gözlemlerden uyuşumsuz olanlarının belirlenmesinde rahatlıkla kullanılabilir. Böyle bir işlem için önce,

- $\hat{x} = \dfrac{[Pl]}{P}$: *ortalama değeri ,*

- $v_i = \hat{x} - l_i$: *düzeltme değerleri,*
- $s = \sqrt{\dfrac{[vv] - v_i^2}{n-1}}$: *karesel ortalama hata*

değerleri hesaplanır. Sonra

$$H_0 : E\{v_i\} = 0$$
$$H_s : E\{v_i\} \neq 0$$

varsayımlarına dayalı bir sıfır hipotezi kurulur. Bu sıfır hipotezine ilişkin test büyüklüğü,

$$t = \frac{|v_i|}{m_{v_i}}$$

olarak bağıntısından elde edilir. Burada, düzeltmelerin deneysel standart sapma değerlerini hesaplamada kullanılan

$$m_{v_i} = s\sqrt{q_{v_i v_i}}$$

formülünde geçen $q_{v_i v_i}$ elemanı; her bir düzeltmenin ters ağırlık katsayısı değerini göstermektedir. Böyle bir değer, bir dolaylı ölçüler dengelemesi probleminin çözümünde,

- $v = Ax - l$: *düzeltme denklemlerini,*
- $P = Q_{ll}^{-1}$: *ölçülerin ters ağırlık matrisini*

olmak üzere, kestirilen $x = (A^T PA)^{-1} A^T Pl$ bilinmeyen parametre değerlerinin düzeltme denkleminde yerine yazılması neticesinde ilk bağımsız ölçülere göre ifade edilmiş bağıntıda ters ağırlık katsayılarının yayılması kuralı uygulanarak

$$Q_{vv} = Q_{ll} - A(A^T PA)^{-1} A^T = Q_{ll} - Q_{\hat{l}\hat{l}} = Q_{ll} - AQ_{\hat{x}\hat{x}} A^T$$

biçiminde bulunan ters ağırlık katsayıları matrisinin, $q_{v_i v_i} = (Q_{vv})_{ii}$ köşegeni üzerindeki elemanları olmaktadır.

Ancak, bazı pratik uygulamalar için Q_{vv} matrisinin köşegen elemanları yerine ε gerçek hatalarla, onlara karşılık gelen v düzeltme değerleri arasındaki $v = -Q_{vv}P\varepsilon$ dönüşüm ilişkisini temsil eden tekil yapıdaki $R = -Q_{vv}P$ *redundansi matrisinin* köşegeni üzerindeki terimlerinden faydalanılır. Bilindiği gibi R matrisin her bir köşegen terimi kendisine karşılık gelen her bir ölçünün ne derece güvenilir olduğunu gösteren $r_{ii} = (-Q_{vv}P)_{ii}$ biçiminde ifade edilmiş $0 < r_{ii} < 1$ aralığında değerler alabilen *kısmi redundansi* değerleri olmaktadır. Bu değerler arasında $R = -Q_{vv}P$ eşitliğinden faydalanılarak; her bir R, Q_{vv} ve P matrislerinin karşılıklı köşegen elemanları için yazılabilen $r_{ii} = q_{v_iv_i}p_i$ ifadesinden,

$$q_{v_iv_i} = \frac{r_{ii}}{p_i}$$

olduğu söylenebilir. Buna göre de; ters ağırlık matrisinin köşegen terimlerinden faydalanarak $m_{v_i} = m_0\sqrt{q_{v_iv_i}}$ şeklinde verilmiş olan standart sapma değerleri,

$$m_{v_i} = s\sqrt{\frac{r_{ii}}{p_i}}$$

biçiminde ifade edilmiş olur. Diğer taraftan, n sayıda ölçüden ve u sayıda bilinmeyenden oluşan bir dengeleme hesabı problemi için $[r_{ii}]$ kısmi redundansi değerlerinin toplamı $r = n - u = [r_{ii}] = İz(Q_{vv}P)_{ii}$ toplam redundansi değerine veya diğer adıyla *Ansermet katsayısına* eşit olduğu bilinmektedir. Uygun güvenirlikteki bir jeodezik ağ için kısmi redundansi değerleri $r_{ii} \geq 0{,}3$ olması önerilmektedir. Uygulamada bazı pratik amaçlar için $\bar{r} = r/n$ bağıntısından elde edilen *ortalama readundansi* değeri kısmi redundansi değerleri yerine kullanılarak; düzeltmelerin ters ağırlık değerleri,

$$q_{v_iv_i} = \frac{r}{np_i}$$

ve deneysel standart sapması da

$$m_{v_i} = s\sqrt{q_{v_iv_i}} = s\sqrt{\frac{r}{np_i}}$$

formülünden hesaplanabilir. Bir yaklaşım olarak böyle bir değer uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde de kullanılabilir.

Sonuçta, şimdiye kadar yapılmış bazı açıklamalara göre *Data snooping testi* Tablo 59 ‘dan görüldüğü gibi kısaca özetlenebilir.

Tablo 59: Data-snooping testi

Kullanılan yaklaşımlar	*Data-snooping testi*	t *-dağılımı irdelemesi*	τ *-dağılımı İrdelemesi*
varyanslar	σ_0^2	$s^2 = \dfrac{[vv] - v_i^2}{f-1}$	$s^2 = \dfrac{[vv] - v_i^2}{f-1}$
Test büyüklüğü	$z_i = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{\sigma\sqrt{q_{v_i v_i}}}$	$t_i = \dfrac{\lvert x_i - \hat{x} \rvert}{s\sqrt{q_{v_i v_i}}} = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{m_{v_i}}$	$\tau_i = \dfrac{\lvert x_i - \hat{x} \rvert}{s\sqrt{q_{v_i v_i}}} = \dfrac{\lvert v_i \rvert}{m_{v_i}}$
Test dağılımı	$N(0,1)$	$t_{f-1,1-\alpha_0/2}$	$\tau_{f-1,1-\alpha_0/2}$
Sınır dğeri	$q = N_{1-\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha_0}}$	$q = t_{f-1,1-\alpha_0/2}$	$q = \tau_{f,1-\alpha_0/2} = \dfrac{t_{f-1,1-\alpha_0/2}\sqrt{f}}{\sqrt{f-1-t^2_{f-1,1-\alpha_0/2}}}$

Örnek: Bir büyüklükle ilgi olarak her biri $p = 0{,}621$ eşit ağırlık ve $\sigma_{x_i} = \pm 1{,}27$ standart sapmalı ayrıca birim ölçünün kuramsal standart sapması $\sigma = \pm 1$ olan ölçülerden oluşan,

$$x = [14{,}0 \quad 19{,}0 \quad 20{,}0 \quad 20{,}0 \quad 20{,}5 \quad 20{,}0 \quad 19{,}5 \quad 19{,}0 \quad 17{,}5 \quad 21{,}0]$$

veri kümesinde, uyuşumsuz olan verilerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile *Data-snooping* yöntemine göre belirlenmesi istenmektedir.

Çözüm: Burada yapılacak bir direkt ölçüler dengelemesi çözümünden,

- *Ölçülerin kesin değeri :* $\hat{x} = \dfrac{p[x]}{[p]} = 19{,}05$
- *Her bir ölçüye ilişkin düzeltmeler:*
  $v^T = \hat{x} - x_i = [5{,}05 \quad 0{,}05 \quad -0{,}95 \quad -0{,}95 \quad -1{,}45 \quad -0{,}95 \quad -0{,}45 \quad 0{,}05 \quad 1{,}55 \quad -1{,}95]$
- *Soncul(a posteriori) birim ölçünün varyansı :* $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{v^T pv}{n-1} = 2{,}53$
- *Kesin değerin varyansı* : $\sigma_{\hat{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{np} = \dfrac{1}{np} = 0{,}161$

- *Her bir düzeltmenin varyansı :* $\sigma_{v_i}^2 = \frac{n-1}{n}\sigma_{x_i}^2 = \frac{n-1}{np}\sigma_0^2 = 1{,}45$

değerleri hesaplanır.

Bu sonuçların *Data-Snooping* testine göre istatistik olarak irdelenebilmesi için sıfır hipotezi

H_0 : x_i *ölçüleri arasında herhangi bir uyuşumsuz ölçü bulunmamaktadır.*
H_s *:* x_i *ölçüleri arasında en az bir uyuşumsuz ölçü bulunmaktadır.*

şeklinde kurulur. Daha sonra, bu veri kümesine sırası ile aşağıdaki hipotez testleri uygulanır.

a) Global Test: Bu amaçla, ölçü kümesi verilerine uygulanacak ilk test işlemi bir *global test* olmaktadır. Global test de; ölçü kümesi ile ilgili öncül *(a priori)* ve soncul *(a posteriori)* varyansların umut değerlerinin aynı kuramsal varyansa sahiptir prensibinden faydalanılır. Aynı zamanda, model hipotezi testi olarak da isimlendirilebilen böyle bir işlem,

$$H_0 : E\{\hat{\sigma}^2\} = \sigma^2$$
$$H_s : E\{\hat{\sigma}^2\} \neq \sigma^2$$

şeklinde bir hipotez kurularak irdelenebilir. Sıfır hipotezinin geçerliliğinin, önceden seçilen bir $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre irdelenebilmesi için standart rastgele değişken dağılımına uyan test büyüklüğü,

$$\chi_{f,\alpha}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{2{,}53}{1} = 2{,}53$$

olarak hesaplanır. Buna karşılık gelen sınır değeri ilgili χ^2 dağılım tablosundan

$$\chi_{f,\alpha}^2 = F_{f,\infty,\alpha} = F_{9,\infty,0{,}05} = 1{,}88$$

olarak alınır. Her iki değerin karşılaştırması neticesinde

$$\chi^2 = 2{,}53 > \chi_{f,\alpha}^2 = F_{f,\infty,\alpha} = F_{9,\infty,0{,}05} = 1{,}88$$

olduğundan H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile ölçüler arasında bir uyuşumsuzluk söz konusu olmaktadır. Burada; uyuşumsuzluğa neden olan etkenler,

- *Ölçü ağırlıklarının doğru seçilememesi,*
- *Fonksiyonel modelin eksik kurulması,*
- *Ölçülerde bir kaba hatanın bulunması*

şeklinde yorumlanabilir.

Ağırlıkların ve fonksiyonel modelin doğru kurulduğu bir dengeleme probleminde, ölçüler arasındaki uyuşumsuzluklar sadece kaba hatalı ölçülerden kaynaklanabileceği düşünülebilir. O zaman ölçüler arasında en az bir uyuşumsuz ölçünün bulunduğuna karar verilir. Böyle bir karar sonucunda, hangi ölçü veya ölçülerin uyuşumsuz olduğu hala belirsizliğini korumaktadır. Bu durumda hangi ölçünün ya da ölçülerin uyuşumsuz olduğunu belirleyebilmek için her bir ölçü tek tek istatistik olarak irdelenir.

Pratikte, her seferinde uyuşumsuzluğa neden olan ölçülerden en büyük hataya sahip olan ölçü, ölçü kümesinden tek tek ayıklandıktan sonra, uyuşumsuz ölçü belirleme işlemine ardı sıra kademeli bir biçimde ölçü kümesinde hiçbir uyuşumsuz veri kalmayıncaya kadar iterasyona devam edilir.

Böylece, veri kümesinde bir uyuşumsuz ölçünün bulunduğu varsayımına göre kullanılmakta olan Data-snooping testi aynı zamanda birden çok uyuşumsuz ölçünün bulunması halinde de uygulanabilir bir yöntem olduğu sağlanmış olur.

b) *Data-Snooping* Testi: *Data-snooping* testinde kurulacak sıfır hipotezi global teste göre daha detaylı ya da özel amaçlı olmaktadır. Bu amaçla, ölçü değerlerinin uyumlu veya en az bir ölçünün uyumsuz olduğu varsayımını esas alan bir sıfır hipotezi,

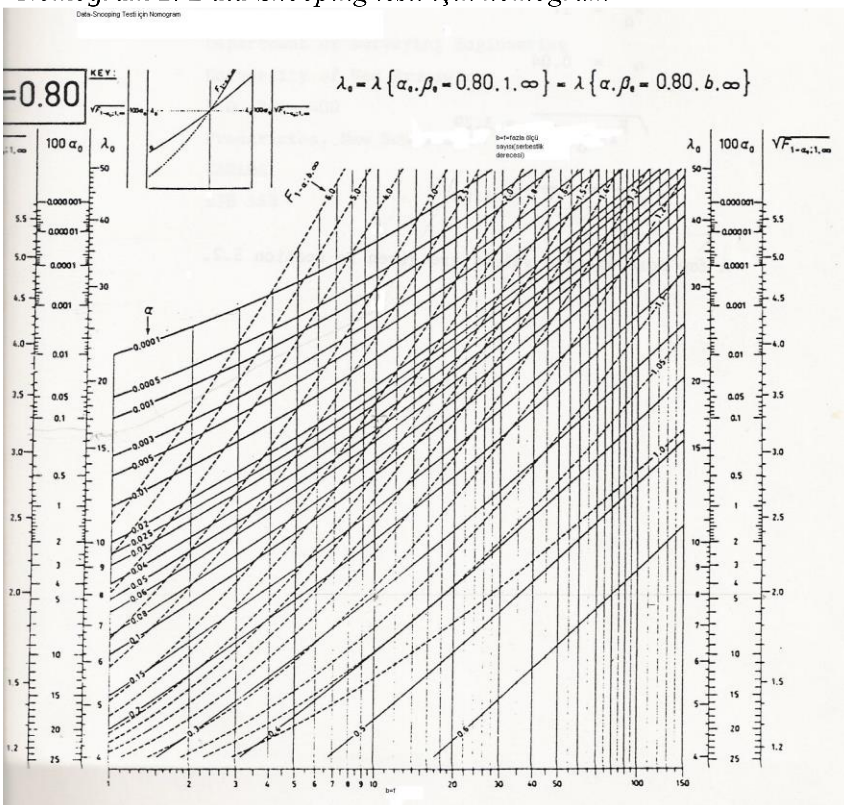
H_0 : *İlk ölçüler arasında uyuşumsuz ölçü bulunmamaktadır*
H_s : *İlk ölçüler arasında en az bir uyuşumsuz ölçü bulunmaktadır*

şeklinde kurulur. Bununla ilgili test büyüklüğü de,

$$t = \left| \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \right| = \left| \frac{5{,}05}{\sqrt{1{,}45}} \right| = 4{,}19$$

olarak hesaplanır.

Nomogram 1: Data-Snooping testi için nomogram



Ölçü kümesi verilerinden hesaplanmış bu test büyüklüğü değerinin kuramsal standart dağılım değeri ile mukayese edilebilmesi için, en ilkel bir yaklaşımla, buna karşılık gelen tablo sınır değeri;

$$\alpha = 0{,}05 \quad , \quad \beta_0 = 0{,}80 \quad \text{ve} \quad f = n-1 = 9 \quad , \quad \alpha_0 = \alpha / n = 0{,}05/10 = 0{,}005$$

ve çift yönlü test için $\alpha_0 / 2 = 0{,}0025$ göre ilgili Nomogram 1'de verilmiş nomogramlardan veya doğrudan standart *t-dağılım* tablosundan,

$$q = t_{f,\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,\alpha_0/2}} = \sqrt{F_{1,\infty,0{,}0025}} = 3{,}1$$

olarak elde edilir. Daha sonra bu iki değerin karşılaştırılmasından, $t > q$ olduğundan H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: O zaman, x_i ölçü değerlerinden en az bir tanesi $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre aynı dağılımda olmadıkları ve uyuşumsuz olduğu söylenebilir.

Uygulamada kesin çözüm için, bir ölçü kümesini oluşturan ölçüler arasında birden çok uyuşumsuz ölçünün bulunması halinde önce en hatalı ölçü grubundan çıkartılarak aynı işlemler geriye kalan verilerden oluşan yeni ölçü kümeleriyle iterasyonlu bir biçimde tekrarlanır.

Sonuçta veriler arasında hiçbir uyuşumsuz ölçü kalmayıncaya kadar iterasyona devam edilir. Böylece, uyuşumsuz veriler ölçü kümesinden ayıklanarak geriye uyuşumlu verilerden oluşan uyuşumlu ölçü kümesi kalır.

c) τ **-*Tau* irdelemesi:** *Tau* dağılım değerlerini kullanarak aynı problemin çözümünde yine benzer bir sıfır hipotezi,

H_0 : *İlk ölçüler arasında uyuşumsuz ölçü bulunmamaktadır*
H_s : *İlk ölçüler arasında en az bir uyuşumsuz ölçü bulunmaktadır*

biçiminde kurulur ve test büyüklüğü de;

$$\hat{\sigma}_{v_i}^2 = \frac{n-1}{np}\hat{\sigma}_0^2 = 3{,}6667$$

olmak üzere,

$$t = \left|\frac{v_i}{\hat{\sigma}_{v_i}}\right| = \left|\frac{5{,}05}{\sqrt{3{,}6667}}\right| = 2{,}64$$

olarak hesaplanır.

Ancak, burada bir karşılaştırma için tablodan alınacak sınır değeri, $\alpha_0 = 0{,}005$ yerine, ölçü sayısı $n = 10$ alınarak, $\alpha = n\alpha_0 = 0{,}05$ hesaplanır. Buna göre de sınır değeri ilgili τ -*Tau* dağılım tablosundan doğrudan veya $\alpha = 0{,}05$ için *t*-dağılım tablosundan $t_{f-1,\alpha} = t_{8,0,05} = 1{,}86$ değeri kullanılarak τ_f -*tau* dağılımı için daha önce verilmiş olan formülden $q = \tau_{f,\alpha} = \tau_{9,0,05} = 2{,}619$ olarak elde edilir.

Buradan, her iki değerin karşılaştırması neticesinde $t = 2{,}64 > q = \tau_{f,\alpha} = 2{,}619$ olduğu için H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Neticede benzer yorum bir daha yapılarak; bu veri kümesindeki birinci ölçünün $\alpha = n\alpha_0 = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre uyuşumsuz ölçü olduğu söylenebilir.

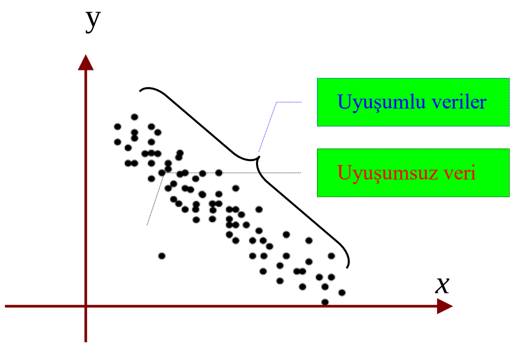
12.5. Walsh Testi

Walsh testi parametrik olmayan bir diğer uyuşumsuz ölçü belirlemesinde kullanılan hipotez testidir. Çok sayıda veriden oluşan bir örnekleme veri kümesindeki uyuşumsuz değerleri belirlemek için *J. E. Walsh* tarafından geliştirilmiştir. *Walsh* testinin uygulanmasında $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı, eğer n örnekleme veri sayısı $n > 220$ ise $\alpha = 0{,}05$, $60 < n < 220$ ise $\alpha = 0{,}10$ alınarak uygulanır. Bu yöntemin özelliği gereği veri sayısı $n < 60$ olması durumunda ise uygulanamaz. Dolayısı ile sadece büyük boyutlu veri kümesi için uygulanabilir bir hipotez testi olmaktadır. Bu yöntemle örnekleme veri kümesi elemanlarının birbiri ile uyuşumlu olup olmadıklarının belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre istatistik olarak irdelenebilmesi için başlangıçta,

H_0 : *Veriler arasında uyuşumsuz ölçü bulunmamaktadır*
H_s : *Veriler arasında en az bir uyuşumsuz ölçü bulunmaktadır*

şeklinde bir sıfır hipotezi kurulur.

Daha sonra, bu sıfır hipotezine ilişkin Walsh hipotez testinin gerçekleştirilebilmesi için ana veri kümesinin bütün elemanları küçükten büyüğe doğru büyüklük sırasına dizilir.



Şekil 36: Uyuşumlu ve uyuşumsuz veriler

Bütün veriler içerisinde muhtemel uyuşumsuz değerler olarak kabul edilebilecek uyuşumsuz verilerin konuyla ilgili yapılmış grafik değerlendirmelerden elde edilmiş toplam sayısı r olarak belirlenir (Şekil 36). Böyle bir değer veri kümesindeki olası uyuşumsuz verilerin olabilecek sayılarını göstermektedir ve her zaman $r \geq 1$ gibi bir değer olmaktadır. Buna göre;

$$c = \sqrt{2n}$$

gibi bir bağıntıdan hesaplanan c sayısının kesirli bir sayı olması halinde bunun bir üst tamsayıya yuvarlatılarak *(örneğin 3.21 kesirli sayısı 4 gibi bir tamsayı alınır)* elde edilen tam sayı değeri kullanılmak üzere;

$$k = r + c \qquad ; \qquad b^2 = \frac{1}{\alpha}$$

ve

$$a = \frac{1 + b\sqrt{(c - b^2)/(c-1)}}{c - b^2 - 1}$$

formülünden a değeri hesaplanır.

Sonuçta; veri kümesindeki hangi verinin uyuşumsuz veri olarak belirlenebileceğine karar verebilmek için, büyüklük sırasına dizilmiş veri kümesinin en küçük ve en büyük uç değerlerinden başlamak üzere aşağıdaki irdelemeler yapılır.

Böyle bir sıralama sonucunda; her iki taraftaki uç verilerinin sırası ile irdelenmesinden; eğer

$$x_{(r)} - (1+a)x_{(r-1)} + ax_{(k)} < 0$$

koşulu sağlanırsa; r sayıda en küçük değerler $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile uyuşumsuz veri olarak kabul edilir.

Aksi takdirde eğer

$$x_{(n+1-r)} - (1+a)x_{(n-r)} + ax_{(n+1-k)} > 0$$

ise; o zaman r sayıda en büyük k değerler $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile uyuşumsuz veri olduğu kabul edilir.

Bu iki koşulun birden geçerli olması halinde, hem en küçük hem de en büyük değerli veriler $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile birlikte uyuşumsuz veri oldukları kabul edilir.

13. BÖLÜM

BAĞIMSIZLIK TESTLERİ

13. RASTGELE DEĞİŞKENLER ARASINDA BAĞIMSIZLIK TESTİ

Çoğu dengeleme probleminde, ilk ölçüler korelasyonsuz olabileceği gibi, fiziksel nedenlerden dolayı bazı elemanter hataların tekrarlanması sonucunda bunların ölçülerin içerisinde daima saklı kalacaklarından fiziksel korelasyonlu değerler olabilirler. Durum böyle olmasa bile, ilk bağımsız gözlemler aynı matematik modelde birlikte ele alınıp değerlendirildiklerinde sonuçları sürekli cebrik korelasyonlu olmaktadır. Özellikleri gereği ölçüler arasında kuramsal anlamda $|\rho| \leq 1$ olabileceği kabul edilen deneysel korelasyon değerleri, bu aralıkta alabileceği değerlerin büyüklüğüne göre zayıf veya kuvvetli olabilir. Böyle bir değerin istatistik anlamda kabul edilebilir ya da göz ardı edilebilir olduklarının irdelenmesi ancak bir korelasyon testi ile izah edilebilir. Burada, böyle bir konu ele alınarak kısaca açıklanmaktadır.

13.1. İki Rastgele Değişken Arasındaki Korelasyon Katsayısının Testi

Her biri normal dağılıma sahip $x \to N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $y \to N(\mu_y, \sigma_y^2)$ gibi iki rastgele değişkenin arasındaki kuramsal korelasyon katsayısı değeri ρ olsun. Bu korelasyon değeri her iki rastgele değişken arasındaki bağımlılığı temsil etmekte ve herhangi bir problemde $-1 \leq \rho \leq +1$ sınır değerleri arasında farklı değerler almaktadır. Bir diğer ifade ile $|\rho| \leq 1$ olmaktadır. Kuramsal anlamda tanımlanan böyle bir korelasyon değerinin farklı problemler için her zaman ulaşılabilen deneysel değeri; n sonlu sayıdaki örnekleme küme elemanlarından;

$$\hat{x} = \frac{[x]}{n} \quad , \quad \hat{y} = \frac{[y]}{n} \quad , \quad s_x^2 = \frac{[(x-\hat{x})^2]}{n-1}$$
$$s_y^2 = \frac{[(y-\hat{y})^2]}{n-1} \quad , \quad s_{xy} = \frac{[(x-\hat{x})(y-\hat{y})]}{n-1}$$

formülleri ile hesaplanan $\hat{x}$, $\hat{y}$ *ortalama*, s_x^2 , s_y^2 *varyans* ve s_{xy} *kovaryans* değerlerinden faydalanarak,

$$\hat{\rho} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

biçiminde elde edilebilir. Bu şekilde deneysel veri kümesi elemanlarından hesaplanmış olan $\hat{\rho}$ korelasyon katsayısı değeri, ρ kuramsal ya da kitle korelasyon katsayısı değerinin bir tahmin değeri olmaktadır. Diğer tahmin yöntemlerinde olduğu gibi $\hat{\rho}$ tahmin değeri de örnekleme sayısındaki değişimlere bağlı olarak değişmektedir. ρ kuramsal değerin önemliliğini test etmek için $\hat{\rho}$ deneysel korelasyon katsayısı dağılımının da bilinmesine gereksinim vardır.

Yukarda sözü edildiği gibi her iki değişkenin her biri; $x \to N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $y \to N(\mu_y, \sigma_y^2)$ parametreli normal dağılımdan alınmış veriler oldukları kabul edildiğinden örneklemelerdeki n veri sayısı artarken $\hat{\rho}$ deneysel değerinin de dağılımı normal dağılıma yaklaşır. $n \to \infty$ yaklaştığından, diğer bir ifade ile deneysel veri kümesindeki n eleman sayısı belli bir değeri aşınca, normal dağılım olarak alınabilir. Bu nedenle, $\hat{\rho}$ deneysel korelasyon katsayısının dağılımı, *n* değerlerinin büyük olduğu durumlarda $\rho = 0$ değeri için daima simetrik ve aynı zamanda normal dağılımda alınabilir. Ancak, küçük *n* değerleri için simetrik olmayan bir normal dağılım özelliğinde yani daha açık bir ifade ile normal dağılımdan biraz sapmış *t-student* dağılımında olur.

Özetle, burada tekrar vurgulamak gerekirse; bu özellik, *n* sayıda veri kümesinden kestirilmiş bir $\hat{\rho}$ deneysel korelasyon katsayısı değerinin $\alpha = 1 - S$ gibi belli bir istatistik anlamlılık seviyesinde ρ gerçek değeri ne derece yansıttığının irdelenmesi için önemli bir görevi üslenmektedir. Bu amaçla, uygulamada, *n* sonlu sayıda deneysel veri kümesi elemanlarından yukarıda sözü edilen yollarla hesaplanmış böyle bir $\hat{\rho}$ deneysel korelasyon değerinin buna karşılık gelen belli bir ρ_0 kuramsal korelasyon değerine belli bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılıklı istatistik anlamlılık seviyesine göre eşdeğer alınıp alınamayacağının hipotez testleri ile istatistik olarak irdelenmesinde *n* sayısının büyüklüğüne bağlı olarak iki farklı veri irdeleme yolu izlenmektedir. Bunlardan bir tanesi

- *n veri sayısının küçük olduğu durumlarda uygulanan t-student dağılım testi,*

- *Bir diğeri de; n veri sayısının fazla olduğu durumlarda uygulanan normal dağılım testidir.*

13.1.1. *t*-Student Dağılımına Göre Korelasyon Katsayısı Testi

Bir problemin çözümünde, n veri sayısının az olduğu durumlarda test edilecek $\hat{\rho}$ deneysel korelasyon katsayısı parametresi yukarıda sözü edildiği gibi n sonlu sayıda bir örnekleme veri kümesinden hesaplanmış ise; burada *t*-dağılımı uygulanarak sıfır hipotezi istatistik olarak belli bir $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine göre test edilir. Bu durumda kuramsal korelasyon değeri $\rho_0 = 0$ alınarak,

$$H_0 : E\{\hat{\rho}\} = 0$$
$$H_s : E\{\hat{\rho}\} \neq 0$$

biçiminde bir sıfır hipotez testi kurulur. İkinci adımda, sıfır hipotezinin ön görülen belli bir istatistik anlamlılık seviyesinde irdelenebilmesi için, standart *t*-student dağılımına sahip bir rasgele değişken dönüşümü yapılır. Yani test büyüklüğü hesaplanır. Bu amaçla, deneysel veri kümelerinden yukarıda verilmiş olan korelasyon katsayısı hesaplama bağıntısına göre hesaplanmış olan $\hat{\rho}$ kestirim parametre değeri, $\mu = 0$ ortalama değer ve

$$s_{\hat{\rho}} = \sqrt{\frac{1 - \hat{\rho}^2}{n - 2}}$$

standart sapmalı bir *t-student* dağılımına sahiptir. Böyle bir dağılma sahip bir rastgele değişkenin standart *t-dağılımındaki* değeri, yani test büyüklüğü,

$$T = \frac{\hat{\rho} - \mu}{s_{\hat{\rho}}}$$

bağıntısından faydalanarak,

$$T = \left[\frac{(n-2)\hat{\rho}^2}{1 - \hat{\rho}^2}\right]^{1/2}$$

olarak hesaplanabilir. Daha sonra, bu test büyüklüğü, önceden öngörülmüş olan bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına ve $f = n - 2$ serbestlik derecesine göre *t*-dağılım tablosundan alınan $q = t_{f, \frac{\alpha}{2}}$ sınır değeri ile karşılaştırılır. Burada yapılan karşılaştırmalar sonucunda; eğer $-q < T < q$ olması halinde H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Bu iki değer arasındaki $\hat{\rho}$ korelasyon katsayısı değeri $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile sıfır alınabilir. Yanı her iki değişkenin bağımsız oldukları söylenebilir.

Tersi durumdaki bir karşılaştırma sonucunda, sıfır hipotezi ret H_s seçenek hipotezi geçerli olur.

Bu durumda yorum: Bu iki değer arasındaki $\hat{\rho}$ korelasyon katsayısı değeri $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ile sıfırdan farklı bir değerlidir ve her iki değişkenin bağımsız oldukları söylenemez.

Örnek: Bir P noktasının iki boyutlu x ve y koordinat değerleri $n=3$ üç farklı fotoğraftan ışınlarla uzay önden kestirme yöntemiyle belirlenmek istenmektedir.

Bu amaçla, yapılan bir dengeleme hesabı çözümü sonucunda, bu noktanın koordinatları ile ilgili *varyans-kovaryans* matrisi, her bir elemanı metre biriminde olmak üzere,

$$\Sigma_{xy} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 1.86 & 5.03 \\ 5.03 & 71.33 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu koordinat değerleri arasındaki anlamlı bir korelasyonun olup olmadığının $\alpha = 0,05$ yanılma olasılığı ile istatistik olarak irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin istatistik olarak irdelenebilmesi için önce bir,

$$H_0 : E\{\hat{\rho}\} = 0$$
$$H_s : E\{\hat{\rho}\} \neq 0$$

sıfır hipotezi kurulur.
Sonra, P noktasının x ve y koordinat değerleri arasındaki korelasyon değeri, Σ_{xy} *varyans-kovaryans* matrisinden,

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2\,\sigma_y^2}} = \frac{5{,}03}{\sqrt{(1{,}86)(71{,}33)}} = 0{,}437$$

olarak hesaplanır. Hipotezle ilgili standartlaştırılmış rastgele değişken ya da test büyüklüğü, ölçü sayısı $n=3$ olduğundan,

$$T = \left[\frac{(n-2)\hat{\rho}^2}{1-\hat{\rho}^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{0{,}437^2}{1-0{,}437^2}\right]^{1/2} = 0{,}49$$

olarak hesaplanır.

Daha sonra, bu test büyüklüğüne karşılık gelen $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile çift taraflı tablo sınır değeri, $f = n-2 = 3-2 = 1$ serbestlik derecesine göre t-dağılım tablosundan,

$$q = t_{f,\frac{\alpha}{2}} = t_{1,0,025} = 12{,}706$$

olarak alınır.

Sonuçta; $T = 0{,}49 < q = t_{1,0,025} = 12{,}706$ olduğundan H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ise ret edilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile bu koordinat değeri korelasyonsuzdur denebilir.

13.1.2. Normal Dağılımına Göre Korelasyon Katsayısı Testi

Konuyla ilgili ikinci bir çözüm yolu; bir deneysel veri kümesinde n veri sayısının fazla olduğu durumlarda uygulanan normal dağılım istatistiğidir. Bu durumda veri irdelemenin ilk adımı olarak en genel şekliyle;

$$H_0 : E\{\hat{\rho}\} = \rho_0$$
$$H_s : E\{\hat{\rho}\} \neq \rho_0$$

biçiminde bir sıfır hipotezi kurulur.

Böyle bir sıfır hipotez testinde, deneysel verilerden hesaplanmış $\hat{\rho}$ korelasyon değerinin öngörülen belli bir $\alpha = 1-S$ istatistik anlamlılık seviyesine göre ρ

gerçek korelasyon katsayısının kabul edilebilir bir $\rho = \rho_0$ gibi ρ_0 korelasyon değerine eşit alınıp alınamayacağının hipotezini test etmek için $\hat{\rho} \neq 0$ olduğu durumda öncelikle $\hat{\rho}$ parametresinin dağılımının bilinmesine ve ayrıca bununla ilgili test büyüklüğünün hesaplanmasına gereksinim duyulmaktadır. Literatürde yer aldığı şekliyle; uygulamada bu gibi sorunlar ancak, *R. A. FİSHER* yaptığı bazı çalışmalar sonucunda önerdiği gibi, Z dönüşümü denen bir algoritma kurmak suretiyle sorun kolayca çözülebilir. *R. A. FİSHER* 'in Z dönüşümü algoritmasında;

$$Z = \frac{1}{2}\ Ln\,(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}})$$

dönüşümü uygulanarak bunun yaklaşık normal dağılımda olduğu söylenebilir. O halde burada konunun açıklanmasından; n elemanlı tüm örneklemeler $\hat{\rho}$ korelasyon katsayılı iki değişkenli normal dağılımdan alınmış ise;

$$Z = \frac{1}{2}\ Ln\,(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) \rightarrow N(\mu\ ,\ \sigma^2)$$

istatistiği,

$$\mu = \frac{1}{2}\ Ln\,(\frac{1+\rho}{1-\rho})$$

ortalama değerli ve

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

standart sapmalı yaklaşık normal dağılımdadır denir/*Akdeniz 2006/.* Bu değerlere göre hesaplanacak bir test büyüklüğü;

$$z = \frac{Z-\mu}{\sigma} \rightarrow N(0\,,1)$$

standart normal dağılımlı rasgele değişken bağıntısından faydalanarak ilgili parametre değerlerinin yerlerine yazılması neticesinde, μ ortalama değer hesaplama formülünde $\rho = \rho_0$ alınmak suretiyle,

$$z = \frac{Z-\mu}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2}Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) - \frac{1}{2}Ln(\frac{1+\rho}{1-\rho})}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = \frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) - Ln(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0})\right\} = \frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}})(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0})\right\}$$

şeklinde hesaplanır.

Burada, $E\{\hat{\rho}\} \neq 0$ farklı herhangi bir $E\{\hat{\rho}\} = \rho_0$ değeri için açıklanmış olan bu durum, $E\{\hat{\rho}\} = 0$ ya da $E\{\hat{\rho}\} = \rho_0 = 0$ değeri için özelleştirilirse, bu durumda sıfır hipotezi için aynı pratik amaçlara yönelik hizmet verecek normal dağılımlı bir test büyüklüğü,

$$z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}})$$

formülünden hesaplanabilir (*Mikhail 1986).*

Daha sonra, bu şekilde hesaplanarak sayısal değeri elde edilmiş olan test büyüklüğü, önceden öngörülen bir $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığına göre normal dağılım tablosundan alınan $q = z_{\frac{\alpha}{2}}$ sınır değerleri ile karşılaştırılır. Hesaplanan z test büyüklüğünün $-q < z < q$ sınır değerleri arasında olması halinde, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir. Tersi durumda, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi geçerli olur.

Yorum**:** H_0 kabul, H_s ret edilmesi halinde, bu iki rasgele değişken α yanılma olasılığına göre korelasyonsuzdur denir.

Aksi halde, H_0 ret, H_s kabul edilmesi durumunda ise; bu iki rasgele değişken α yanılma olasılığına göre korelasyonludur denebilir.

Örnek: Bir P noktasının iki boyutlu x ve y koordinat değerleri, *n=40* adet farklı fotoğraftan doğrudan aynı anda ve koşullar altında ölçülmektedir. Yapılan ölçü ve hesaplamalar sonucunda bu iki x ve y rasgele değişkenleri arasında $\hat{\rho} = 0{,}78$ gibi bir deneysel korelasyon katsayısı değerinin bulunduğu tespit edilmiştir. Bu koordinat değerleri arasında $\hat{\rho} = 0{,}78$ olarak hesaplanan korelasyon katsayısı değerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile $\rho_0 = 0{,}80$ gibi bir değer alınıp alınamayacağını istatistik olarak irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin istatistik olarak irdelenmesinde *n=40* olduğundan korelasyon katsayısının normal dağılımla test edilmesinde yeterli olduğu kabul edilerek ilgili irdeleme işlemleri normal dağılama göre yapılabilir. Bu amaçla, öncelikle korelasyon katsayısının tahmin değeri $\hat{\rho} = 0{,}78$ ve kuramsal değeri $\rho_0 = 0{,}80$ olduğu dikkate alınarak,

$$H_0 : E\{\hat{\rho}\} = \rho_0$$
$$H_s : E\{\hat{\rho}\} \neq \rho_0$$

şeklinde bir hipotez kurulur.

İkinci adımda, sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğünün hesabı için, $\hat{\rho} = 0{,}78$ alınarak Z dönüşüm parametresi değeri;

$$Z = \frac{1}{2}\ Ln\,(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) = 1{,}0454$$

$\rho_0 = 0{,}80$ alınarak ortalama değeri;

$$\mu = \frac{1}{2}\ Ln\,(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}) = 1{,}0986$$

n=40 için de standart sapma değeri;

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = 0{,}1644$$

parametre değerleri hesaplandıktan sonra

$$z = \frac{Z-\mu}{\sigma} = \frac{\frac{1}{2}Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) - \frac{1}{2}Ln(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0})}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}} = \frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}) - Ln(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0})\right\} =$$
$$= \frac{\sqrt{n-3}}{2}\left\{Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}})(\frac{1-\rho_0}{1+\rho_0})\right\} = \frac{1{,}0454-1{,}0986}{0{,}1644} = -0{,}3236$$

olarak elde edilir.

Daha sonra, bu şekilde hesaplanmış olan $z = -0{,}3236$ test büyüklüğü değeri $\alpha = 1 - S = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre ilgili normal dağılım tablolarından $\alpha/2 = 0{,}025$ değerine göre alınan $z_{\alpha/2} = z_{0,975} = 1{,}96$ iki taraflı sınır değeri ile karşılaştırılır.

Böyle bir karşılaştırma sonucunda, $|z| < z_{\alpha/2} = 1{,}96$ olduğundan $H_0 : E\{\hat{\rho}\} = \rho_0$ sıfır hipotezi kabul, $H_s : E\{\hat{\rho}\} \neq \rho_0$ seçenek hipotezi ret edilebilir.

Yorum: $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile bu koordinat değerleri arasında ilgili ölçülerden hesaplanmış olan $\hat{\rho} = 0{,}78$ korelasyon katsayısı değeri $\rho_0 = 0{,}80$ gibi bir korelasyon katsayısı değeri olarak alınabilir

13.2. İkiden Fazla Rastgele Değişken Arasındaki Korelasyon Katsayılarının Testi

Korelasyon analizi iki rastgele değişken arasında yapılırsa, yukarıda söylenen ve yapılan istatistik irdeleme işlemlerinin her biri bunun için de geçerli olur. Ancak, rastgele değişken sayısı ikiden fazla olursa, o zaman *parsiyel korelasyon katsayıları* kullanılarak aralarındaki bağımlılığı ifade eden korelasyon katsayılarının istatistik irdelemesinin yapılması daha uygun olmaktadır. Böyle bir problem için eğer, $x_1 \quad x_2 \quad .... \quad x_u$ şeklinde u adet rastgele değişkenden oluşan bir,

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_u \end{bmatrix}$$

rastgele vektörünün Σ_{xx} varyans-kovaryans matrisi ve

$$W_{xx} = \Sigma_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & ..... & w_{1u} \\ w_{12} & w_{22} & ..... & w_{2u} \\ \vdots & \vdots & ..... & \vdots \\ w_{1u} & w_{2u} & ..... & w_{uu} \end{bmatrix}$$

ise; o zaman değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları matrisin elemanlarından faydalanılarak,

$$\hat{\rho}_{12/3,....u} = \frac{-w_{12}}{\sqrt{w_{11} w_{22}}}$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu şekilde elde edilmiş olan korelasyon katsayılarının istatistik olarak irdelenmesi için kurulması gereken bir hipotez,

$$H_0 : E\{\hat{\rho}_{12/3...u}\} = 0$$
$$H_s : E\{\hat{\rho}_{12/3...u}\} \neq 0$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu hipotezle ilgili bir test büyüklüğü de, n : ölçü, ve u : bilinmeyenlerin sayısını göstermek üzere,

$$t_{n-u} = \left[\frac{(n-u)\hat{\rho}_{12/3...u}}{1-\hat{\rho}_{12/3...u}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

bağıntısından hesaplanır.

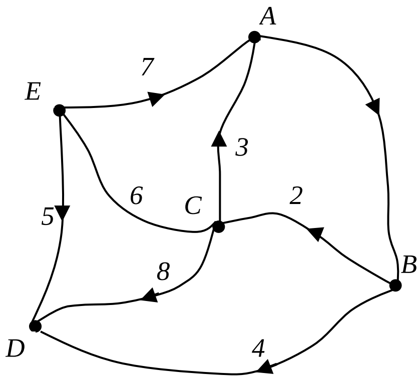
Böyle bir test büyüklüğünün istatistik olarak irdelenebilmesi için gerekli olan sınır değeri önceden öngörülen bir $\alpha = 1-S$ yanılma olasılığı ile t-dağılım tablolarından, $q = t_{(n-u),\ \alpha/2}$ olarak alınır.

Bu iki değerin karşılaştırması sonucunda, her iki değer arasında eğer $t_{n-u} < q$ olacak şekilde bir ilişki var ise, o zaman H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: $\alpha = 1-S$ yanılma olasılığı ile bu değişkenlerin korelasyonsuz oldukları söylenebilir.

Tersi durumda; eğer $t_{n-u} > q$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir. Bu durumda yorum: $\alpha = 1-S$ yanılma olasılığı ile bu değişkenlerin korelasyonsuz oldukları söylenemez.

Örnek: Kesin yüksekliği $H_a = 800{,}000m$ olarak bilinen bir A noktasına göre *B, C, D ve E* noktalarının yüksekliklerini belirlemek amacıyla,



Şekil 37: Nivelman ağı

şekildeki nivelman ağı ölçülüyor. 5 noktalı olan bu nivelman ağının A noktası sabit kabul edilerek dayalı dengelenmesi sonucunda bilinmeyenlerin ters ağırlık matrisi,

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} 0,806 & 0,445 & 0,505 & 0,333 \\ 0,445 & 0,645 & 0,504 & 0,414 \\ 0,505 & 0,504 & 0,999 & 0,505 \\ 0,333 & 0,414 & 0,505 & 0,742 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmaktadır. Çözüm sonucunda hesaplanan bilinmeyenlerin bağımsız olup olmadıklarını $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre irdelenmek istenmektedir.

Çözüm: Burada, önce Q_{xx} ters ağırlık katsayıları matrisinden korelasyon katsayıları ya da matrisi, bu matris köşegen elemanları $+1$ olacak şekilde standartlaştırılmasından korelasyon matrisi

$$\{\hat{\rho}_m\} = \begin{bmatrix} 1 & 0,617 & 0,563 & 0,436 \\ 0,617 & 1 & 0,628 & 0,606 \\ 0,563 & 0,628 & 1 & 0,594 \\ 0,436 & 0,606 & 0,594 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde, $Q_{xx}^{-1} = N$ eşitliğine göre,

$$N = W = Q_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,185 & -1,064 & -0,568 & 0,000 \\ -1,064 & 3,492 & -0,714 & -1,010 \\ -0,568 & -0,714 & 2,023 & -0,741 \\ 0,000 & -1,010 & -0,741 & 2,476 \end{bmatrix}$$

elde edilen matristen parsiyel korelasyon katsayıları matrisi de,

$$\{\hat{\rho}_p\} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,385 & 0,270 & 0,000 \\ 0,385 & 1,000 & 0,269 & 0,344 \\ 0,270 & 0.269 & 1,000 & 0,331 \\ 0,000 & 0,344 & 0,331 & 1,000 \end{bmatrix}$$

biçiminde hesaplanmış olur.

Buradan, daha sonra, *n=8* ölçü sayısı ve *u=4* bilinmeyen sayısı olmak üzere, fazla ölçü sayısı *r=4 radundans* sayısı bulunur. $\hat{\rho}_m$ korelasyon matrisinde en büyük korelasyon değeri 0,628 dir. Ve buna karşılık gelen t test değeri *t=1,614* ve $\hat{\rho}_p$ korelasyon matrisin de ise; 0,385 ve buna karşılık gelen t değeri de *t=0,834* olmaktadır.

Neticede, her iki değerin $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ile irdelenmesinde bunlarla ilgili çift taraflı *t*-dağılımı tablo sınır değeri $t_{4,0,025} = 2{,}776$ olmaktadır. Her iki yoldan hesaplanmış bu değerlerin bir birbiriyle karşılaştırılmasından, $t < t_{4,0.025}$ *(test büyüklükleri tablo sınır değerlerinden küçük olduğu için)* H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: Hesaplanan nokta yükseklik değerleri arasında $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre anlamlı bir korelasyon bulunduğu söylenebilir.

Not: Sıfır hipotezinin irdelenmesi sonucunda tersi bir durumla karşılaşılırsa bunun zıttı yönde bir karar verilerek bu yönde bir yorum yapılır.

13.3. χ^2 -Bağımsızlık Testi

Bu test yöntemin de x ve y gibi iki rastgele değişkenin (x_i, y_i) ; $i = 1, 2, \ldots, n$ sayıda yapılmış gözlem değerlerinin bağımlı olup olmadıklarının belli bir istatistik anlamlılık seviyesine göre irdelenmesi konu edilmektedir. Bu amaçla kurulacak sıfır hipotezi,

H_0 : *Veriler birbirinden bağımsızdır.*
H_s : *Veriler birbirinden bağımlıdır.*

biçiminde oluşturulur. Böyle bir test işleminin gerçekleştirilebilmesi için pratikte; deneysel veri kümesi, tablo 60 ‘daki gibi rxk adet alt gruba ayrılır. Bu grupların her biri için; $(i, j) = p_i p_j$,

$$\sum p_i = 1 \qquad \text{ve} \qquad \sum p'_j = 1$$

olacak şekilde, $p_{ij} = P(x, y)$ değerleri hesaplanır. Bu değerlerden bir parametre,

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{f_{ij}}{n} = 1$$

olacak şekilde hesaplandıktan sonra χ^2 -dağılımına sahip bir rastgele değişken

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_{ij} - np_i p'_j)^2}{np_i p'_j}$$

şekilde oluşturulur.

Neticede, bu formül yardımıyla;

$$p_i = \frac{f_i}{n} \quad \text{ve} \quad p'_j = \frac{f'_j}{n}$$

olmak üzere, *(r+k-2)* adet sınıf için de dağılımlar belirlenmiş olur (Tablo 60)

Tablo 60: rxk Adet alt gruplar

Sınıflar x	y				*Satır Toplamı*
	1	*2*	....	*k*	
1	f_{11}	f_{12}	....	f_{1k}	$f_1 = \sum_{i=1}^{k} f_{1i}$
2	f_{21}	f_{22}	....	f_{2k}	$f_2 = \sum_{i=1}^{k} f_{2i}$
:	:	:	....	:	:
r	f_{r1}	f_{r2}	....	f_{rk}	$f_r = \sum_{i=1}^{k} f_{ri}$
Sütun Toplamı	$f'_1 = \sum_{i=1}^{r} f_{i1}$	$f'_2 = \sum_{i=1}^{r} f_{i2}$	....	$f'_n = \sum_{i=1}^{r} f_{ik}$	$n = \sum_{i=1}^{k} f'_i = \sum_{i=1}^{r} f_i$

Sonuçta, her bir sınıf değerlerinin toplamından sıfır hipotezine ilişkin standart dağılımlı rastgele değişken ya da test büyüklüğü,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_{ij} - \frac{f_i f'_j}{n})^2}{\frac{f_i f'_j}{n}}$$

olarak hesaplanabilir.

Bu test büyüklüğü, $f = rk - (r+k-2) - 1 = (r-1)(k-1)$ serbestlik derecesine göre χ_f^2 dağılımında olur. Daha sonra, böyle bir test büyüklüğü değerinin önceden öngörülmüş bir $S = 1 - \alpha$ anlamlılık seviyesine göre kabul edilebilir makul bir düzeyde olup olmadığının irdelenebilmesi için, test büyüklüğüne karşılık gelen bir kritik değer, ilgili χ^2 dağılım tablosundan, $\alpha = 1 - S$ yanılma olasılığı ve f serbestlik derecesine göre, $q = \chi^2_{f,\alpha}$ olarak alınır. Her iki değerin karşılaştırılması neticesinde; eğer $\chi^2 < q = \chi^2_{f,\alpha}$ ise, H_0 hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: f serbestlik derecesi ve α yanılma olasılığı ile bu veriler bağımsız kabul edilebilir hükmü geçerli olur ve paralelinde tersi yönde bir yorum yapılır.

Örnek: Bir ülke nirengi ağının üçgen kapanma hataları; y_i *: deniz seviyesinden yükseklikleri,* $(y_1 : 0 - 1km.)$*arası yükseklikte olanlarının ve* $(y_2 : 1km.)$ *daha yüksekte olanlarının sayısı,* x_i *: üçgenlerin genişliklerine* göre

Tablo 61: Üçgen kapanma hatalarının gruplandırılması

Gruplar	y_1	y_2	Toplam
x_1: Pozitif değerli üçgen kapanmaları	32	12	44
x_2: Negatif değerli üçgen kapanmaları	14	22	36
x_3: Sıfır değerli üçgen kapanmaları	6	9	15
Toplam	52	43	95

şeklinde alt gruplara ayrılmışlardır. Bu grupların $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre bağımsız olduklarının istatistik olarak irdelenmesi istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin bağımsızlık yönünden irdelenebilmesi için öncelikle,

H_0 *: Alt gruplar birbirinden bağımsızdır.*

H_s *: Alt gruplar birbirinden bağımlıdır.*

şeklinde bir hipotez kurulur. Sonra, bu hipotezle ilgili test büyüklüğü,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \frac{(f_{ij} - \frac{f_i f_j'}{n})^2}{\frac{f_i f_j'}{n}} = \frac{(32 - \frac{(52)(44)}{95})^2}{\frac{(52)(44)}{95}} + \frac{(12 - \frac{(43)(44)}{95})^2}{\frac{(43)(44)}{95}} + \frac{(22 - \frac{(43)(36)}{95})^2}{\frac{(43)(36)}{95}} +$$

$$+ \frac{(14 - \frac{(52)(36)}{95})^2}{\frac{(52)(36)}{95}} + \frac{(6 - \frac{(52)(15)}{95})^2}{\frac{(52)(15)}{95}} + \frac{(9 - \frac{(43)(15)}{95})^2}{\frac{(43)(15)}{95}} = 10{,}71$$

olarak hesaplanır.

Bu değere karşılık gelen sınır değeri; $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = (r-1)(k-1) = (3-1)(2-1) = 2$ serbestlik derecesine göre ilgili χ^2-dağılım tablolarından $q = \chi^2_{2,0,05} = 5{,}99$ olarak alınır.

Her iki değerin karşılaştırması neticesinde, $\chi^2 = 10{,}71 > q = \chi^2_{2,0,05} = 5{,}99$ olduğundan, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Yorum: Bu gruplar $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = 2$ serbestlik derecesine göre bağımsız sayılamazlar hükmü geçerli olur.

13.4. χ^2-Ortak Dağılım Testi

Bu test yönteminde, k adet örnek veri kümesi rk sayıda alt kümeye ayrılarak, bütün verilerin aynı dağılımda olup olmadıklarının irdelenmesi öngörülmektedir. Böyle bir problemin çözülebilmesi için χ^2-bağımsızlık testinden faydalanılır. Bu amaçla kurulacak bir sıfır hipotezi,

H_0 : *Veriler aynı dağılımdadır.*
H_s : *Veriler farklı dağılımdadır.*

şeklinde olur. Bu yöntemdeki sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğü,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(f_{ij} - \dfrac{f_{i1}+f_{i2}}{2}\right)^2}{\dfrac{f_{i1}+f_{i2}}{2}}$$

biçiminde hesaplanır.

Daha sonra, test büyüklüğünün kuramsal bir tablo sınır değeri ile karşılaştırılması amacıyla, α yanılma olasılığı ve

$$f = (r-1)(k-1)$$

serbestlik derecesine göre ilgili χ^2 dağılım tablolarından alınarak $q = \chi^2_{f,\alpha}$

tablo değeri bulunur. Her iki değerin karşılaştırmasından, eğer $\chi^2 < q = \chi^2_{f,\alpha}$ ise, H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir.

Yorum: f serbestlik derecesi ve α yanılma olasılığı ile bu veriler aynı dağılımda oldukları kabul edilebilir hükmü geçerli olur.

Aksi halde eğer $\chi^2 > q$ ise, H_0 sıfır hipotezi ret, H_s seçenek hipotezi kabul edilir.

Bu durumda, f serbestlik derecesi ve α yanılma olasılığı ile bu veriler aynı dağılımda oldukları kabul edilemez şeklinde tersi yönde bir yorum yapılır.

Örnek: Bir fabrikadaki üretim sonuçları incelenmek amacıyla toplanan ürünler; y_i *: Dağılımlarını (* y_1 *: 1 numaralı dağılımı ve* y_2 *: 2 numaralı dağılımı)* x_i *: Üretimdeki performansları* temsil etmek üzere,

Tablo 62 Ürünlerin dağılımlara göre sınıflandırılması

Gruplar	y_1	y_2	Toplam
x_1: İyi performanslılar	*61*	*54*	*115*
x_2: Zayıf performanslılar	*24*	*29*	*53*
x_3: Sabit performanslılar	*15*	*17*	*32*
Toplam	*100*	*100*	*200*

şeklinde alt gruplara ayrılarak sınıflandırılıyorlar.

Burada, bu grupların $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığına göre aynı dağılımda olup olmadıklarının istatistik olarak irdelenmesi istenmektedir.

Çözüm: Böyle bir problemin paragraf 13.4. anlatılanlara göre çözülebilmesi için önce benzer bir sıfır hipotezi,

$$H_0 : \textit{Veriler aynı dağılımdadır.}$$
$$H_s : \textit{Veriler farklı dağılımdadır.}$$

biçiminde kurulur.

Daha sonra, paragraf 13.4. ‘de anlatılanlardan faydalanarak bu sıfır hipotezi ile ilgili test büyüklüğü,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_{ij} - \frac{f_{i1}+f_{i2}}{2})^2}{\frac{f_{i1}+f_{i2}}{2}} = \frac{(61-57.5)^2}{57.5} + \frac{(54-57.5)^2}{57.5} +$$

$$+\frac{(24-26.5)^2}{26.5} + \frac{(29-26.5)^2}{26.5} + \frac{(15-16)^2}{16} + \frac{(17-16)^2}{16} = 1.023$$

olarak hesaplanır.

Buradan hesaplanmış olan deneysel test büyüklüğü değerine karşılık gelen sınır *(kritik)* değeri, χ^2 dağılım tablosundan $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve

$$f = (r-1)(k-1) = 2$$

serbestlik derecesine göre $q = \chi^2_{2,0,05} = 5{,}99$ olarak alınır.

Sonuçta, her iki değerin karşılaştırılmasından $\chi^2 < q$ olduğu için; H_0 sıfır hipotezi kabul, H_s seçenek hipotezi ret edilir. Bunun neticesinde de aşağıdaki yorum yapılabilir.

Yorum: Bu gruplar $\alpha = 0{,}05$ yanılma olasılığı ve $f = 2$ serbestlik derecesine göre aynı dağılımda oldukları kabul edilebilirler.

13.5. Uyuşumsuz Ölçüler ve Diğer Test Yöntemlerinin Genel Bir Özeti

Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde birbirinden farklı varsayımlara dayalı çeşitli test yöntemleri geliştirilmiştir. Bu test yöntemlerinin seçiminde veri sayısının çokluğu kadar standart dağılımlı rastgele değişken olan test büyüklüklerinin hesaplanmasında kullanılan varyansların türü ve uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesindeki sıra da önemli olmaktadır.

Bu amaçla, burada, tek örnek ölçü kümesi istatistiklerinden olan uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi ile ilgili farklı hipotez testi yöntemleri ve ayrıca birden fazla ölçü kümesi arasındaki kovaryans ilişkilerini içeren korelasyon katsayılarının irdelenmesi ile ilgili hipotez testleri aşağıda verilmiş olan, Tablo 63 'deki gibi kısaca özetlenebilir.

Tablo 63: Uyuşumsuz ölçüler ve korelasyon testleri

Hipotez testinin		Sıfır hipotezinin	
Bölümü	Adı	Test büyüklüğü	Sınır değeri
12.1.	Dixon Testi *3 ile 7 arası*	$\tau = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$ ve $\tau = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	Q_{tablo}
	Ekstrem ölçü değerleri için hipotez testi	Kuramsal standart sapma değerinin bilinmesi halinde $U = \frac{\lvert x_E - \hat{x}\rvert}{\sigma} \rightarrow U(0,\ 1)$	U_α
		Kuramsal standart sapma değerinin bilinmemesi halinde $V = \frac{\lvert x_E - \hat{x}\rvert}{s} \rightarrow V(0,\ 1)$	V_α
12.2.	Rosner Testi	$R_{r+1} = \frac{\lvert x^{(r)} - \hat{x}^{(r)}\rvert}{s^{(r)}}$	R_α
12.3.	Grubbs Hipotez Testi	$t = \frac{\max\lvert x_i - \hat{x}\rvert}{s}$	$q = \frac{(n-1)}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{t^2_{(\alpha/(2n),n-2)}}{n-2+t^2_{(\alpha/(2n),n-2)}}}$
12.4	Data-snooping Testi	$z_i = \frac{\lvert x_i - \mu\rvert}{\sigma} \rightarrow N(0,1)$	$q = N_{\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,\alpha_0/2}}$
		t *-dağılımı irdelemesi* $t_i = \frac{\lvert x_i - \hat{x}\rvert}{s\sqrt{q_{v_i v_i}}} = \frac{\lvert v_i\rvert}{m_{v_i}}$	$q = t_{f-1,1-\alpha_0/2}$
		τ *-dağılımı irdelemesi* $\tau_i = \frac{\lvert x_i - \hat{x}\rvert}{s\sqrt{q_{v_i v_i}}} = \frac{\lvert v_i\rvert}{m_{v_i}}$	$q = \tau_{f,1-\alpha_0/2} = \frac{t_{f-1,1-\alpha_0/2}\sqrt{f}}{\sqrt{f-1-t^2_{f-1,1-\alpha_0/2}}}$
12.5.	Walsh Testi	$x_{(r)} - (1+a)x_{(r-1)} + ax_{(k)} < 0$ $x_{(n+1-r)} - (1+a)x_{(n-r)} + ax_{(n+1-k)} > 0$	*Non-parametrik test*
13.1.1	İki rastgele değişkenler arasındaki korelasyon katsayılarının testi	*t-student dağılımına göre test* $T = \left[\frac{(n-2)\hat{\rho}^2}{1-\hat{\rho}^2}\right]^{1/2}$	$q = t_{f,\alpha}$
13.1.2		*Normal dağılımına göre test* $z = \frac{\sqrt{n-3}}{2} Ln(\frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}})$	z_α
13.2	İkiden fazla rastgele değişken arasındaki kore-lasyon testi	$t_{n-u} = \left[\frac{(n-u)\hat{\rho}_{12/3\ldots u}}{1-\hat{\rho}_{12/3\ldots u}}\right]^{\frac{1}{2}}$	$q = t_{(n-u),\ \alpha/2}$
13.3	İki rastgele değiş-kenin χ^2 -bağım-sızlık testi	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_{ij} - \frac{f_i f_j'}{n})^2}{\frac{f_i f_j'}{n}}$	$q = \chi^2_{f,\alpha}$
13.4	İki rastgele değişkenin χ^2 or-tak dağılım Testi	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(f_{ij} - \frac{f_{i1}+f_{i2}}{2})^2}{\frac{f_{i1}+f_{i2}}{2}}$	$q = \chi^2_{f,\alpha}$